

**Vysoké učení technické v Brně**

Fakulta stavební  
Ústav stavební mechaniky



DIZERTAČNÍ PRÁCE

**Nelineární projevy mechanických konstrukcí**  
Nonlinear Symptoms of Mechanical Structures

verze pro Internet (Internet version)  
<http://www.kitnarf.cz>

Vypracoval: Ing. Petr Frantík  
Školitelé: Ing. Zbyněk Keršner, CSc.  
doc. RNDr. Jiří Macur, CSc.

Olomouc, srpen 2004

---

© 2004 Petr Frantík  
© Jana Kolmačková (logo)

Ústav stavební mechaniky  
Fakulta stavební  
Vysoké učení technické v Brně  
Česká republika

---

---

## Acknowledgement

Realisation of this work was not possible without cooperation with some people and institutions. I would like to express thanks to mine supervisors Dr. ZBYNĚK KERŠNER and Assoc. Prof. JIŘÍ MACUR for leading and irreplaceable support. Unique acknowledgements belong to people from Institute of Structural Mechanics, Bauhaus-University Weimar: especially to Prof. CHRISTIAN BUCHER for possibility of research staying, support and realisation of experiments, Dr. VOLKMAR ZABEL for his help and assistance with experiments, Dipl. Ing. STEVE SEYLER for help with video measurement and its analysis.

## Poděkování

Uskutečnění této práce by nebylo možné bez spolupráce s některými lidmi a institucemi. Chtěl bych vyjádřit poděkování mým školitelům Dr. ZBYŇKU KERŠNEROVI a doc. JIŘÍMU MACUROVI za vedení a nenahraditelnou podporu. Zvláštní poděkování patří lidem z Ústavu stavební mechaniky, Bauhaus univerzity ve Weimaru: zejména Prof. CHRISTIANU BUCHEROVI za možnost výzkumného pobytu, podporu a realizaci experimentu, Dr. VOLKMARU ZABELOVI za jeho asistenci s experimenty, Ing. STEVOVI SEYLEROVI za pomoc s videoměřením a jeho analýzou.

Project Socrates-Erasmus, the Czech Republic research project MSM 261100009 and grant No. 103/03/1350 from the Grant Agency of the Czech Republic are gratefully acknowledged.

Tato práce byla vytvořena v rámci výzkumného záměru MSM 261100009 a s podporou grantu GA ČR 103/03/1350 Grantové agentury ČR. Výzkumný pobyt na univerzitě ve Weimaru byl umožněn projektem Socrates-Erasmus.

# Abstract

The present thesis is concerned with applying the results of the latest research in the properties and possible behaviour of an extensive class of dynamic systems focussing on models of mechanical structures. It is proved here that non-linear symptoms (such as an unpredictable evolution) of a system that can describe a simple slender structure are determined by the intrinsic system qualities (no unknown external influences).

In the introduction, the non-linear symptoms of deterministic systems as they are known today are clearly outlined listing detailed descriptions of methods used for their observation and recognition.

The modelling of structures together with a derivation of the equations of motion for a geometrically non-linear model of a generally slender plane beam structure can be found in a self-contained chapter.

However, the main part of the thesis is dedicated to a dynamic experiment conducted. A special model is derived and described that has been developed specifically for the purposes of the thesis to be used for comparing the real observations and numerical computer simulations. It is demonstrated that, despite the complexity of the behaviour of a system, a good agreement can be achieved between the response of a real structure and that of its numeric model, which is particularly proved by comparing the bifurcation diagrams and significant limit cycles of a selected structure.

The thesis has been written as part of the MSM 261100009 research project „Non-traditional methods for investigating complex and vague systems“, which is among the most important research activities carried out at Brno University of Technology since 1998.

# Abstrakt

Předkládaná práce se zaměřuje na aplikaci nejnovějších poznatků o vlastnostech a možném chování široké třídy dynamických systémů, zejména však modelů mechanických konstrukcí. Je zde prokázáno, že nelineární projevy (např. nepředvídatelný vývoj) systému, jenž může popisovat jednoduchou štíhlou konstrukci, umožňují vnitřní vlastnosti tohoto systému a nikoliv např. neznámé vnější vlivy.

V úvodu práce jsou přehledně rozděleny nelineární projevy deterministických systémů, tak jak jsou v současnosti známy, s podrobně popsány metodami pro jejich sledování a rozpoznávání.

Ucelenou kapitolu tvoří modelování konstrukcí, včetně odvození pohybových rovnic geometricky nelineárního modelu obecné štíhlé rovinné prutové konstrukce.

Hlavní část této práce je však věnována provedení dynamického experimentu. Pro srovnání reálného pozorování a numerických simulací na počítači, byl zvláště pro účely této práce vytvořen speciální model, jehož popis a odvození je v práci uvedeno. Je ukázáno, že navzdory složitosti chování systému může být dosaženo dobré shody odezvy reálné konstrukce a jejího numerického modelu, což je dokumentováno zejména srovnáním bifurkačních diagramů a význačných limitních cyklů vybrané konstrukce.

Práce vznikla v rámci výzkumného záměru MSM 261100009: „Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů“, který patří k významným vědecko-výzkumným aktivitám na VUT v Brně od roku 1998.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>10</b>
1.1	Historie . . . . .	10
1.1.1	Chaos . . . . .	11
1.2	Cíle práce . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Použité pojmy a teorie</b>	<b>12</b>
2.1	Mechanické konstrukce . . . . .	12
2.1.1	Lineární chování . . . . .	12
2.1.2	Původ nelinearit . . . . .	13
2.2	Dynamika konstrukcí . . . . .	14
2.2.1	Výpočet konstrukcí . . . . .	14
2.2.2	Frekvence a perioda . . . . .	14
2.2.3	Tlumení . . . . .	15
2.2.4	Volné kmitání konstrukce . . . . .	15
2.2.5	Kmitání dynamicky zatížené konstrukce . . . . .	16
2.2.6	Dynamické zatížení . . . . .	17
2.2.7	Ustálené chování konstrukce . . . . .	18
2.2.8	Rezonance . . . . .	19
2.3	Dynamické systémy . . . . .	20
2.3.1	Definice dynamického systému . . . . .	20
2.3.2	Aplikace . . . . .	21
2.3.3	Limitní množiny . . . . .	21
2.3.4	Bazén přitažlivosti . . . . .	22
2.3.5	Fraktály . . . . .	23
2.4	Teorie katastrof . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Nelineární jevy a nelineární chování</b>	<b>25</b>
3.1	Nelineární jevy ve statických úlohách . . . . .	25
3.1.1	Bifurkace statického stavu . . . . .	26
3.1.2	Vznik/zánik statického stavu . . . . .	31
3.2	Nelineární jevy v dynamických úlohách . . . . .	34
3.2.1	Bifurkace v dynamické úloze . . . . .	34
3.2.2	Vznik/zánik limitní množiny . . . . .	37
3.2.3	Kaskáda bifurkací . . . . .	37
3.2.4	Chaotické chování . . . . .	38

<b>4</b>	<b>Sledování nelineárních jevů</b>	<b>40</b>
4.1	Zobrazování ve fázovém prostoru . . . . .	40
4.1.1	Projekce trajektorie . . . . .	41
4.1.2	Poincarého mapa . . . . .	43
4.1.3	Bifurkační diagram . . . . .	44
4.1.4	Bazény přitažlivosti . . . . .	45
4.1.5	Různé agregované atributy . . . . .	46
4.1.6	Inverzní modelování . . . . .	47
4.2	Jiná zobrazení . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Řešení pohybových rovnic</b>	<b>48</b>
5.1	Eulerova metoda . . . . .	48
5.2	Klasická Runge-Kuttova metoda . . . . .	49
5.3	Upravená Eulerova metoda . . . . .	50
5.4	Pokročilejší metody . . . . .	51
5.4.1	Implicitní metody . . . . .	51
5.4.2	Adamsovy metody . . . . .	51
5.4.3	Adaptivní metody . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Modelování konstrukcí</b>	<b>52</b>
6.1	Metoda konečných prvků . . . . .	52
6.1.1	Pohybové rovnice konzervativního modelu . . . . .	53
6.1.2	Vlastnosti metody konečných prvků . . . . .	53
6.2	Metoda tuhých dílců . . . . .	54
6.2.1	Odvození pohybových rovnic konzervativního modelu . . . . .	54
6.2.2	Vlastnosti metody tuhých dílců . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Speciální model konzoly</b>	<b>63</b>
7.1	Úvod . . . . .	63
7.2	Energie . . . . .	64
7.2.1	Kinetická energie . . . . .	64
7.2.2	Potenciální energie . . . . .	66
7.3	Pohybové rovnice . . . . .	66
7.3.1	Maticový tvar . . . . .	68
7.4	Vlastnosti speciálního modelu . . . . .	69
7.5	Aplikovaný model konzoly . . . . .	70
7.5.1	Tlumení . . . . .	70
7.5.2	Soustředěná hmota na volném konci . . . . .	70
7.5.3	Imperfekce úlohy . . . . .	71
7.5.4	Gravitace a dynamické zatěžování . . . . .	72
7.5.5	Aplikovaný model . . . . .	72
<b>8</b>	<b>Experiment</b>	<b>73</b>
8.1	Konstrukce . . . . .	73
8.2	Dynamické zatěžování . . . . .	75
8.3	Konfigurace . . . . .	75



---

8.3.1	Měření ohybové tuhosti prutu $EI$ . . . . .	78
8.3.2	Imperfekce prutu . . . . .	79
8.3.3	Měření vlastností útlumu . . . . .	80
8.4	Dynamický experiment . . . . .	86
8.4.1	Numerické simulace . . . . .	86
8.4.2	Výsledky experimentu . . . . .	90
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>94</b>
9.1	Přínosy . . . . .	94
9.2	Výhledy . . . . .	95
	<b>Přílohy</b>	<b>97</b>
A:	Stabilita metod řešení pohybových rovnic . . . . .	97
B:	Implementace řešení dynamického systému . . . . .	102
C:	Fotodokumentace . . . . .	109
D:	Videodokumentace . . . . .	109
	<b>Literatura</b>	<b>110</b>
	<b>Autor</b>	<b>114</b>
	<b>Publikační činnost</b>	<b>115</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Tato práce je vytvořena pro souhrnné zřehlednění současných znalostí o bohatství možného chování mechanických konstrukcí, o metodách vyšetřování a zařazování pozorovaných a pozorovatelných jevů, ke kterým může na konstrukci docházet a zejména o provedených experimentech, jimiž je dokládána realita těchto popisovaných jevů.

Práce se opírá o nové poznatky dotýkající se širokého spektra vědních oborů, zvláště však o *teorii dynamických systémů* a *teorii chaosu*, které dávají základní rámec pro klasifikaci jevů, které byly dříve mnohdy opomíjeny či popřípadě nepřesně zařazovány.

Problematika, kterou se zde zabýváme, se neustále vyvíjí a stává se zájmem čím dál tím většího okruhu vědecké i laické veřejnosti. Mezi její významné vlastnosti patří schopnost překlenovat mezioborové bariéry tím, že ukazuje až zarážející podobnosti v úplně odlišných systémech. Podobnosti, jejichž zákonitost snad dříve nikdo netušil. Ukazuje nám kvalitativně nový pohled na procesy probíhající kolem nás a na možnosti jejich modelování. To hlavní, co nám dokládá toto nové vědní odvětví, lze říci jedinou, nám všem dobře známou větou: „*Celek je víc než pouhý součet částí*“. Převedeno do řeči stavební mechaniky: „*Mít dobrý model určité konstrukce neznamená vědět, jak se bude chovat*“, nebo: „*Poznání konstrukce nekončí vytvořením jejího modelu*“.

### 1.1 Historie

Vědecké zkoumání prostředí ve kterém žijeme má dlouhou a pohnutou historii. Často bylo a možná i stále zůstává svázáno s tím, čemu lidé věří. Například z knihy HALA HELLMANA [30] je dobře patrné, k jakým sporům ve vědě docházelo a jak mnohdy z našeho pohledu naivní byly aktuální představy o fungování světa. Z vývoje vědy je také patrný úspěch přístupu západní civilizace, která se oproti civilizaci východní soustředila na sledování izolovaných elementárních jevů a „nevšíkala si“ komplexních jevů okolo sebe. Úvahy byly takové, že komplexní jevy jsou příčinou interakce mnoha nezávislých procesů, které jsou (po jejich izolaci) pro zkoumání vhodnější. Zřejmě nikoho, po úspěších západní civilizace, nenapadlo, že to nemusí stačit.

Vědecké poznání prošlo za svou historii mnoha revizemi, přičemž snad nejbouřlivějším obdobím bylo zřejmě 20. století. Naštěstí je zde vždy k dispozici možnost prověření toho, co si o světě myslíme. Přítomnost této možnosti je tak zřejmá a důležitá, že lze říci: „právě to je věda“. Slovy RICHARDA FEYNMANA: „*Prověrkou našich vědomostí je výhradně experiment*“.

K jedné revizi vědomostí došlo zejména díky vzrůstajícímu zájmu o nelineární systémy. Vzniklo vědní odvětví, které z *náhody*, *katastrofy* a z pojmu *chaos* udělalo předmět svého zájmu.

### 1.1.1 Chaos

Reálné systémy, ačkoliv mnohdy docela jednoduché, se mohou chovat velmi složitě. HENRI POINCARÉ již v roce 1899 při studiu *deterministického modelu*<sup>1</sup> pohybu tří gravitačně vázaných těles objevil druh pohybu, kterému dnes říkáme *deterministický chaos*. V současnosti již s jistotou víme, že deterministický chaos je nejsložitějším možným druhem chování deterministického systému [57].

Dnes je také zřejmé, že chování opírající se o přítomnost nelinearity v systému je v přírodě spíše pravidlem než výjimkou. Protože člověk se od svého „uvědomění si se“ nechává přírodou inspirovat<sup>2</sup>, jistě může být přínosem zkoumání a vytváření systémů tohoto druhu.

Je třeba říci, že chaotické chování vzbuzuje zpravidla touhu po jeho odstranění či potlačení. Nyní ovšem existují i jiné pohledy, které chápou chaos jako žádoucí způsob chování. Chaos má totiž tyto kladné vlastnosti [57]:

- je ohraničeným chováním (tj. nemusí způsobit kolaps systému),
- vyznačuje se lepší absorbcí energie a hybnosti (není náchylný k destabilizujícím vlivům),
- je jistým způsobem odolný vůči rezonanci,
- je charakteristický mícháním (ztrácí se v něm informace o historii).

## 1.2 Cíle práce

V současnosti chybí (popř. se běžně nepoužívá) klasifikační rámec pro nelineární jevy, ke kterým může docházet při sledování mechanických konstrukcí. V teoretické části této práce je cílem představit takový klasifikační rámec, který může sloužit pro identifikaci nelineárních projevů mechanických konstrukcí. S tímto klasifikačním rámcem souvisejí způsoby sledování konstrukcí (zejména jejich pohybu). Proto je cílem práce také představit metody pro sledování a rozpoznávání nelineárních jevů.

V praktické části je cílem vybrat a zdůvodnit výběr jednoduché mechanické konstrukce mající nelineární odezvu. Užít, popř. vyvinout efektivní model této konstrukce a nalézt vhodné parametry pro experimentální srovnání. Provést experiment a aplikovat popsané metody sledování nelineárních jevů, včetně verifikace vybraného modelu.

<sup>1</sup>Deterministický model je systém, ve kterém je každý stav určen stavem předcházejícím. V deterministickém modelu neuvažujeme nejistoty ve znalosti vlastností prvků systému a jejich interakcí.

<sup>2</sup>Živý svět kolem nás je zřejmě velmi dobře fungující optimalizační proces, jehož výsledky stojí za to podrobně zkoumat.

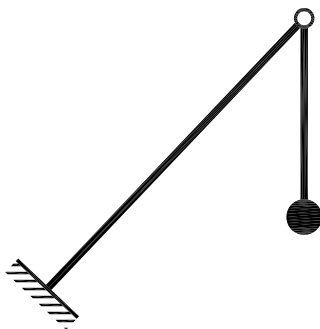
# Kapitola 2

## Použité pojmy a teorie

Pro naplnění cílů této dizertační práce je zapotřebí ujasnit pojmy, které jsou zde užity. Je zde předpokládána znalost stavební mechaniky a všeho, co se jí bezprostředně týká, ovšem některé základní věci budou přesto zmíněny, aby se předešlo případnému nedorozumění.

### 2.1 Mechanické konstrukce

Reálným objektem zájmu této dizertační práce jsou mechanické konstrukce. Ve stavební mechanice zpravidla studujeme konstrukce, které nejsou mechanismem (tj. nevykazují *kinematickou neurčitost*<sup>1</sup>). Zde se nemusíme tímto požadavkem omezovat a proto zvolíme pojem *mechanické konstrukce*. Klasifikační rámec pro jejich nelineární projevy bude totiž platit obecně. Příklad mechanické konstrukce, pro kterou může být užit navržený klasifikační rámec je na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Příklad zkoumané konstrukce

#### 2.1.1 Lineární chování

Pod pojmem *lineární chování konstrukce* máme na mysli souvislost mezi zvolenou akcí na konstrukci (zatížení) a zvolenou reakcí, tj. odezvou konstrukce (např. změna tvaru), pro

---

<sup>1</sup>Konstrukce či její část je kinematicky neurčitá, jestliže jejímu idealizovanému, absolutně tuhému modelu nebyly odebrány všechny *stupně volnosti*.

kteřou lze závislost mezi velikostí akce na velikosti reakce vyjádřit lineární funkcí. Pro takové konstrukce lze potom s výhodou užívat tzv. *principu superpozice*, který popírá tvrzení uvedené v úvodu této práce. Princip superpozice totiž říká: „*Celek není víc než součet částí*“.

Lineární chování je z matematického hlediska první (lineární) aproximací obecné odezvy konstrukce. Je zde přímá návaznost na předpoklady stavebně-mechanické *teorie malých deformací*, která vztahuje popis stavu konstrukce k jejímu nepřetvořenému tvaru.

### 2.1.2 Původ nelinearit

Svět kolem nás je sice nelineární (pokud je to tak možno říci), ovšem fyzikové se často nelineárnímu popisu jevů důvodně vyhýbali. Je to dáno faktem, že nelinearita v systému často způsobí jeho obtížné či dokonce nemožné řešení. A to platí nejen pro hledání analytických řešení, ale – jak se ukázalo ve druhé polovině 20. století – i pro hledání numerických řešení, viz např. [11]. Rozděleme si základní zdroje nelinearit u mechanických konstrukcí:

- *Geometrická nelinearita* – při velkých změnách tvaru konstrukce dochází k nezanedbatelným změnám např. v poloze zatížení a není tedy možno vztahovat popis stavu konstrukce jen k jejímu nepřetvořenému tvaru.
- *Fyzikálně-materiálová nelinearita I. druhu* – atomy hmoty jsou k sobě vázány silami, jejichž závislost na vzdálenosti atomů lze lineárně aproximovat jen v relativně malém rozsahu vychýlení z rovnovážných poloh, jak je vidět na obr. 2.2 (rovnovážná poloha je nulový bod na funkci meziatomové síly), viz např. [15].
- *Fyzikálně-materiálová nelinearita II. druhu* – při přetváření materiálu dochází k nevratné změně jeho struktury, např. posun krystalových rovin, pohyb *dislokací*<sup>2</sup> apod. O těchto jevech je dobře pojednáno např. v [6] a [15].
- *Konstrukční nelinearita* – při přetváření konstrukce může dojít ke kontaktu dvou dříve oddělených částí, nadzvednutí konstrukce z podpory apod.



Obrázek 2.2: Funkce meziatomové síly nepolárních atomů

<sup>2</sup>Dislokace je „porucha“ v krystalické struktuře materiálu – oblast dotyku dvou krystalů, cizorodý atom, apod. Výskyt dislokací je důležitý zejména pro pevnost kovů (např. v oceli tvoří dislokace mimo jiné atomy uhlíku), protože krystalové roviny se o ně „opírají“ a nedochází tak k jejich prokluzu. Ovšem např. pevnost diamantu je dislokacemi snížena. Ukazuje se, že výskyt dislokací v krystalu urychluje jeho růst, viz [15].

## 2.2 Dynamika konstrukcí

Předmětem zájmu dynamiky konstrukcí je zejména vratný pohyb konstrukce – kmitání, oscilace. K tomu, aby konstrukce kmitala je zapotřebí dvou základních prvků, které jsou ve skutečnosti často přítomny jako celek:

- pružný člen s určitou tuhostí (popř. obecný vratný mechanismus, jakým je například u kyvadla působící gravitační zrychlení, viz obrázek 2.1),
- hmotný člen s určitou setrvačnou hmotností.

Lze říci, že hmotný člen je zejména nositelem *kinetické energie* konstrukce (energie pohybu) a pružný člen je zejména nositelem *potenciální energie* konstrukce (energie polohy). Vzájemnou interakcí těchto dvou členů pak může docházet ke kmitání konstrukce.

### 2.2.1 Výpočet konstrukcí

Při řešení pohybu mechanických konstrukcí se uplatní zejména zásady *Klasické mechaniky*, která zřejmě umožňuje nejefektivnější popis konstrukcí uvažovaných měřítek a rychlostí. Nicméně úvahy na mikroskopické a tzv. *mezoskopické*<sup>3</sup> úrovni struktury materiálu jistě mohou být přínosné.

Máme-li v prvním přiblížení nějaký *konzervativní mechanický systém*<sup>4</sup>, který chceme modelovat (tj. získat jeho *pohybové rovnice*), pak je vhodné sestavit funkci  $L$ , zvanou *Lagrangeova funkce* danou vztahem [39]:

$$L = E_k - E_p, \tag{2.1}$$

kde  $E_k$  je kinetická energie systému a  $E_p$  je potenciální energie systému. Pohybové rovnice systému pak dostaneme užitím vztahu:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{2.2}$$

kde  $q_i$  a  $\dot{q}_i$  jsou tzv. *zobecněné souřadnice* prvků systému a  $t$  je čas.

### 2.2.2 Frekvence a perioda

Jelikož je kmitání často opakující se (periodický) pohyb, lze mluvit o jeho *frekvenci* a *periodě*. Obecně řečeno je frekvence nějakého jevu počet opakování tohoto jevu za časovou jednotku. Perioda je čas, který uplyne mezi dvěma po sobě jdoucími výskyty opakujícího se jevu a je obrácenou hodnotou frekvence.

Vzhledem k výše uvedeným základním prvkům konstrukce víme, že frekvence kmitání takové konstrukce je tím vyšší, čím větší je tuhost pružného členu a tím nižší, čím větší je hmotnost hmotného členu.

---

<sup>3</sup>Obě tyto úrovně se uplatňují například při zkoumání lomu materiálu, či analýze tzv. *únavového porušení materiálu* a také při modelování *hydratace cementové pasty*, viz [11],[52].

<sup>4</sup>V konzervativním systému se zachovává jeho energie. Tedy nedochází k jejímu úniku – nejsou zde přítomny tzv. *tlumící členy*, viz kapitola 2.2.3.

### 2.2.3 Tlumení

Při kmitání reálné konstrukce dochází k důležitému jevu, kterým je rozptyl (*dissipace*) sledovaných forem energie do „okolí“ konstrukce. Nejdůležitější způsoby rozptylu energie pružné konstrukce jsou tyto:

- zvýšení teploty (přeměna kinetické energie konstrukce na kinetickou energii atomů resp. molekul hmoty konstrukce – tzv. *materiálové tlumení*),
- odpor prostředí (přeměna kinetické energie konstrukce na kinetickou energii atomů resp. molekul okolního prostředí).

Rozptyl energie způsobuje (v důsledku *zákona o zachování energie*), že volně kmitající konstrukce po určitém čase kmitat přestává. Je-li konstrukce zatížena dynamickým (v čase proměnlivým) zatížením, ovlivňuje tlumení zejména *přechodovou oblast* pohybu konstrukce vyúsťující v její *ustálené chování* (viz kapitoly 2.2.5, 2.2.7).

Již dříve bylo zjištěno, že pro obvyklé tlumicí jevy existuje možnost jejich jednoduchého a přesto výstižného popisu (tato skutečnost je předmětem údivu fyziků, jak uvádí např. FEYNMAN, viz [15]). Nejužitečnější a nejčastěji užívaný popis těchto tlumících jevů je následující:

- útlum konstantní (suché tření – kontaktní odpor k vzájemnému posunu dvou pevných, k sobě přitlačovaných materiálů),
- útlum lineárně závislý na rychlosti posunutí (pružná přetvoření materiálu, odpor okolního tekutého prostředí při malých rychlostech posunutí),
- útlum kvadraticky závislý na rychlosti posunutí (odpor okolního tekutého prostředí při větších rychlostech posunutí)<sup>5</sup>.

U modelů reálných stavebních konstrukcí se nejčastěji uplatňuje zejména model útlumu lineárně závislého na rychlosti posunutí.

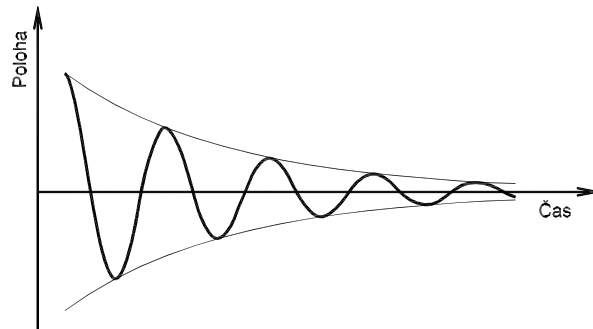
### 2.2.4 Volné kmitání konstrukce

Není-li konstrukce podrobena dynamickému zatížení a je-li zároveň vzdálena od klidového rovnovážného stavu, pak dojde k jejímu *volnému kmitání*. Volné kmitání konstrukce nám toho může hodně prozradit o jejích vlastnostech i jejích vnitřních parametrech. Například je-li časový průběh kmitání bodů konstrukce blízký funkci:

$$x(t) = A_0 e^{-ct} \cos \Omega t, \quad (2.3)$$

kde  $A_0$  je amplituda kmitání,  $c$  je koeficient útlumu,  $\Omega$  je frekvence kmitů a  $t$  je čas; pak lze říci, že se konstrukce chová lineárně a je i lineárně (závisle na rychlosti) tlumena. Graf této funkce je vidět na obrázku 2.3.

<sup>5</sup>Poznamenejme, že se jedná vždy pouze o aproximaci. Přesněji bychom mohli mluvit o útlumu obecně nelineárně závislém na rychlosti.



Obrázek 2.3: Funkce polohy při volném kmitání lineárně se chovající konstrukce s lineárním útlumem (rovnice (2.3)) včetně obálky amplitud, což je funkce  $\pm A_0 e^{-ct}$

### 2.2.5 Kmitání dynamicky zatížené konstrukce

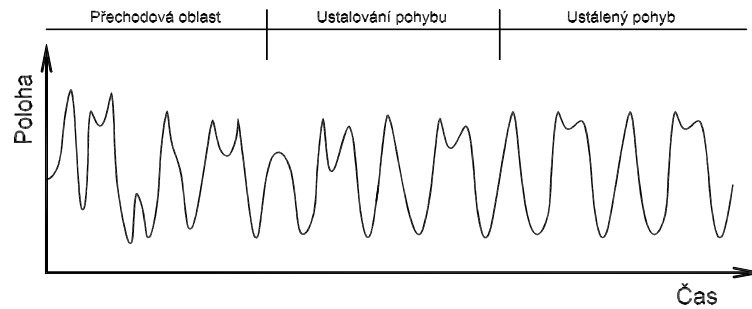
U dynamicky zatížené konstrukce dochází k interakci mezi dynamickým zatížením a pohybující se konstrukcí. Tato interakce může nabýt komplikovaných projevů, viz kapitola 2.2.7. Lze říci, že konstrukce v obecném případě prochází v průběhu času charakteristickými typy chování:

- První typ, kdy není zřejmý další vývoj pohybu konstrukce, je nazýván *přechodovou oblastí* pohybu konstrukce. Tento typ chování je často velmi složitý a budoucí vývoj konstrukce vykazuje nepředvídatelnost.
- Je-li další vývoj pohybu konstrukce zřejmý, nastává druhý typ – *ustalování pohybu* konstrukce (reálně je tento typ chování rozlišitelný od následujícího tím, že existuje hranice přesnosti měření, která nám limituje možnost sledování ustalovacího procesu). Tento typ chování je topologicky shodný s následujícím typem a často také nebývá odlišován.
- Třetím typem je již *ustálený pohyb* konstrukce (z hlediska idealizovaného řešení je tento typ chování v jistém smyslu nedosažitelný, jelikož se systém k tomuto typu často pouze neomezeně přibližuje).

Jistou představu si můžeme učinit z průběhu funkce posunutí určitého, nejlépe význačného, bodu na konstrukci. Příklad takové funkce je vidět na obrázku 2.4.

Tyto typy chování lze také dobře pochopit v analogické situaci s tuhou kuličkou vhozenou na zvlněnou plochu s mnoha důlky. Kulička se nejprve všelijak po ploše kutálí, až ji zachytí některý z důlků, ve kterém krouží, dokud se nezastaví na jeho dně. V této analogii jsou dobře patrné ony tři typy pohybu kuličky: kutálení po ploše, kroužení v důlku a klidový stav na dně důlku). Dynamickým zatížením tuto analogii zkomplikujeme tím, že budeme se zvlněnou plochou pohybovat.



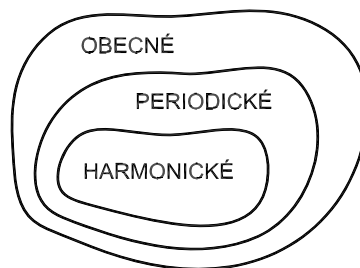


Obrázek 2.4: Typy kmitání konstrukce znázorněné na funkci posunutí určitého bodu

### 2.2.6 Dynamické zatížení

Zatížení, které se v čase neustále mění (zejména periodicky), zajišťuje konstrukci stálý přísun energie. V tom je možno spatřovat nebezpečí, protože je-li konstrukce s tímto zatížením v jistém souladu, může dojít ke kumulaci přiváděné energie v konstrukci. Tomuto jevu, souladu zatížení a konstrukce říkáme *rezonance*, viz kapitola 2.2.8. V našem bezprostředním okolí je to celkem běžný jev, v některých případech dokonce žádoucí.

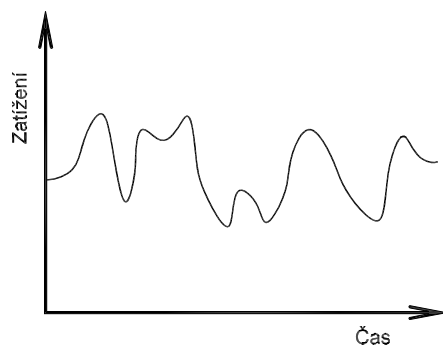
Zmíněný soulad mezi konstrukcí a zatížením je závislý především na průběhu dynamického zatížení a na vlastnostech konstrukce (kapitola 2.2.4). Dynamické zatížení můžeme zařadit, dle jeho průběhu v čase, do množin zobrazených na obr. 2.5.



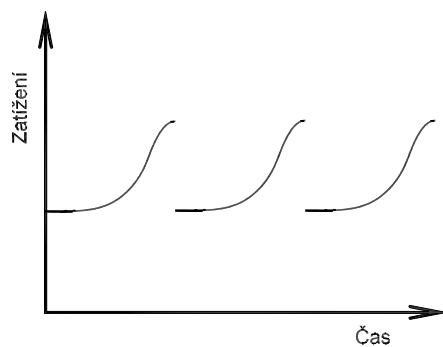
Obrázek 2.5: Množinová klasifikace dynamického zatížení dle periodicity

Za obecné zatížení považujeme jakékoliv libovolné v čase proměnlivé zatížení, tedy zejména *aperiodické zatížení*. *Periodické zatížení* je takové zatížení, které se v čase opakuje s určitou periodou. A *harmonické zatížení* je zvláštním periodickým zatížením, jehož průběh je harmonickou funkcí času.

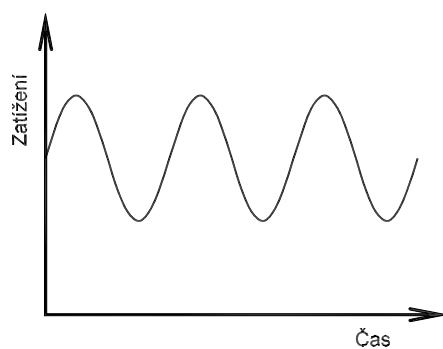
Příklady průběhu popsaných druhů zatížení jsou vidět na obrázcích 2.6, 2.7 a 2.8.



Obrázek 2.6: Příklad časového průběhu aperiodického zatížení



Obrázek 2.7: Příklad časového průběhu periodického zatížení

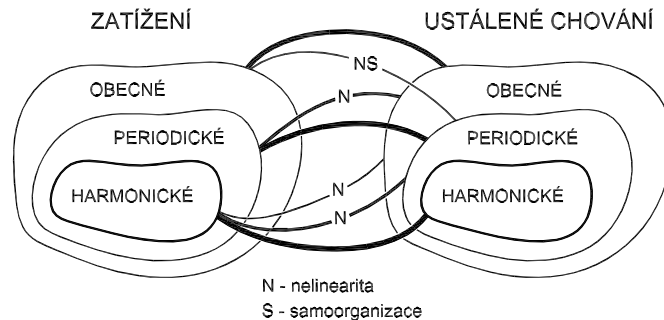


Obrázek 2.8: Časový průběh harmonického zatížení

### 2.2.7 Ustálené chování konstrukce

Jak konstrukce přejde do ustáleného chování jsme již uvedli. Tento typ chování je závislý zejména na vlastnostech konstrukce a na typu a velikosti zatížení. Pro samotné ustálené chování je ovšem zatížení zpravidla dominantním činitelem.

Často platí, že jaký je typ zatížení, takový je typ odezvy konstrukce. Tato situace nastává vždy, když se konstrukce chová lineárně. Nechová-li se však konstrukce lineárně, pak může dojít k situaci, že bude typ odezvy složitější než typ přiloženého zatížení. Dokonce naopak odezva může být jednodušší než zatížení. U nelineárního systému je totiž možný vznik tzv. *samoorganizace*, kdy odezva konstrukce na aperiodické zatížení bude periodická, viz např. [11]. Vše můžeme znázornit schématem na obr. 2.9.



Obrázek 2.9: Vztahy mezi zatížením a ustáleným chováním konstrukce vzhledem k periodicitě

Na obrázku 2.9 jsou vidět souvislosti mezi dynamickým zatížením působícím na konstrukci a odezvou konstrukce na toto zatížení. Dodejme, že existuje zvláštní typ ustáleného chování, které není přímo znázorněno ve schématu 2.9. Jedná se o *kvaziperiodické chování* (má nekonečně dlouhou periodu), které tvoří rozhraní mezi periodickým a aperiodickým chováním.

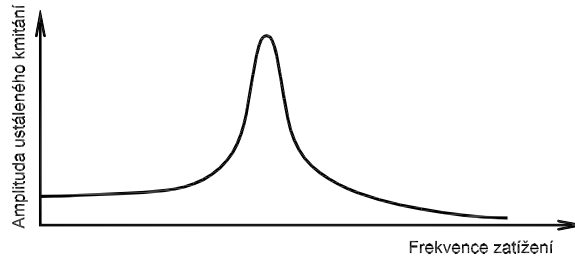
### 2.2.8 Rezonance

Vznik rezonance závisí zejména na poloze a frekvenci periodického zatížení a na vlastních frekvencích při volném kmitání konstrukce. Rezonanci si můžeme zobrazit (popř. tímto postupem změřit) pomocí průběhu amplitudy při ustáleném pohybu konstrukce v závislosti na frekvenci periodického zatížení (amplituda zatížení je ponechána konstantní). Na obrázku 2.10 je vidět takové zobrazení pro jednoduchou<sup>6</sup> lineárně se chovající konstrukci. Rezonance se v takovém zobrazení projeví jako výrazné zvýšení amplitudy v ustáleném chování konstrukce pro určitou hodnotu frekvence zatížení.

V případě, že máme lineárně se chovající konstrukci s víc než jedinou výraznou vlastní frekvencí, pak můžeme v našem zobrazení průběhu amplitudy v ustálení pozorovat více vrcholů odpovídajících těmto frekvencím.

Obecně rezonance hrají ve fyzice důležitou roli, jak uvádí např. FEYNMAN v [15]. Ve stavebnictví (zejména v mostařské praxi) je patrná snaha využívat frekvenční odezvu konstrukce ke sledování jejích vlastností, viz například [47]. Souhrnně vzato se snažíme rezonanci při provozu konstrukce zabránit, protože to může způsobit její kolaps, takže rezonanční frekvence hledáme spíše proto, abychom zabránili jejím projevům.

<sup>6</sup>Myslíme tím konstrukci, která má jedinou výraznou vlastní frekvenci při volném kmitání.



Obrázek 2.10: Rezonanční vrchol pro jednoduchou, lineárně se chovající konstrukci

## 2.3 Dynamické systémy

Pro sledování a simulaci dynamických jevů (zejména těch nelineárních) byl vyvinut obecný aparát, který shrnuje již dříve zmíněná teorie dynamických systémů. Zatížená konstrukce je v souladu s těmito postupy chápána jako tzv. *dynamický systém*. Výhodou tohoto přístupu je možnost jeho aplikace bez ohledu na druh dynamického systému s tím, že získané zkušenosti mohou mít univerzální platnost. Co je míněno pod pojmem dynamický systém a proč je výhodné takto obecně chápat zatíženou konstrukci, shrneme v této kapitole.

### 2.3.1 Definice dynamického systému

Pro dynamický systém je charakteristické, že jeho okamžitý stav i jeho budoucí vývoj je beze zbytku určen konečnou množinou hodnot, nazývaných *stavové proměnné* systému (například polohy a rychlosti jeho prvků)<sup>7</sup>. Tedy každý systém s těmito vlastnostmi lze chápat jako dynamický systém.

Jelikož je stav dynamického systému plně určen množinou stavových proměnných, jejichž hodnoty svojí proměnlivostí v čase ukazují jeho vývoj, lze chápat změnu těchto proměnných jako pohyb v prostoru všech možných stavů systému, nazývaném *fázový prostor*. Bod ve fázovém prostoru je tedy jednoznačným stavem systému a je jím dán i budoucí vývoj systému<sup>8</sup>.

Určuje-li vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  hodnoty  $n$  stavových proměnných systému, pak modelem dynamického systému nazveme soustavu diferenciálních rovnic<sup>9</sup>:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (2.4)$$

kde  $t$  je čas a vektor funkcí  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  určuje vztahy pro budoucí vývoj systému. Uvedenou vektorovou diferenciální rovnici lze po složkách vyjádřit takto:

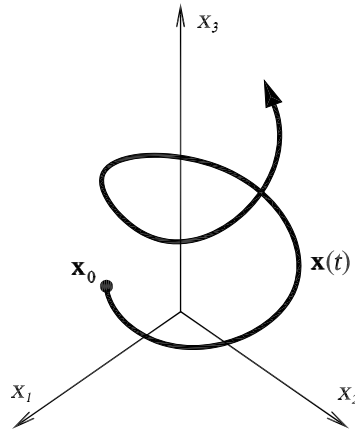
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

<sup>7</sup>Jedná se tedy o deterministický systém (pojem byl vysvětlen v kapitole 1), čímž již nyní tato abstrakce neodpovídá kvantové podstatě reality.

<sup>8</sup>Každý bod ve fázovém prostoru lze chápat jako úplnou množinu *počátečních podmínek* systému. Za počáteční podmínky chápeme hodnoty stavových proměnných systému v okamžiku, který považujeme za počátek našeho zájmu o vývoj systému.

<sup>9</sup>Tečkou nad symbolem je označena derivace veličiny podle času.

Řešením této soustavy diferenciálních rovnic pro určité počáteční podmínky  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  je vektorová funkce  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  udávající hodnoty stavových proměnných  $\mathbf{x}$  v čase  $t$ . S pomocí nalezeného řešení  $\mathbf{x}(t)$  pak můžeme vývoj systému znázornit ve fázovém prostoru jako spojitou křivku, tzv. *trajektorii systému* (viz obrázek 2.11).



Obrázek 2.11: Znázornění trajektorie systému v trojrozměrném fázovém prostoru

### 2.3.2 Aplikace

K tomu, aby mohly být zatížené mechanické konstrukce formulovány jako model dynamického systému (2.4), je třeba učinit několik poznámek:

- diferenciální rovnice vyšších řádů lze převést na diferenciální rovnice prvního řádu substitucí,
- nalézt kanonickou definici určitého dynamického systému může být obtížné (např. z důvodu vzájemné závislosti složek  $\dot{\mathbf{x}}$ , jak je patrné z modelu odvozeného v kapitole 7),
- řešení nelineárního dynamického systému lze nalézt numerickými metodami, popsanými v kapitole 5,
- pro zobrazování trajektorií a bodů ve vícerozměrném fázovém prostoru je možno užít metod posaných v kapitole 4.

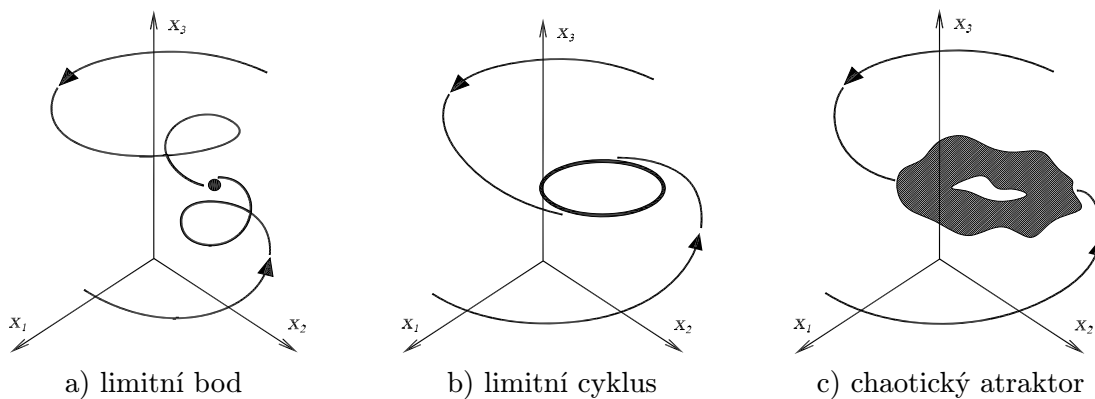
### 2.3.3 Limitní množiny

Věnujme se nyní opět pohybující se konstrukci. V kapitole 2.2.7 jsme uvedli, že po přechodové oblasti pohybu konstrukce dochází k ustalování a následnému ustálenému pohybu. Ve fázovém prostoru modelu dynamického systému reprezentujícího konstrukci se ustalování projeví zřetelným způsobem (narozdíl od zobrazení, která neprobíhají ve fázovém prostoru). Trajektorie systému se při ustalování pohybu začne přibližovat k tzv. *limitní množině*<sup>10</sup> bodů ve fázovém prostoru, se kterou splyne pro čas  $t \rightarrow \infty$  (alternativně pro čas  $t \rightarrow -\infty$ ).

<sup>10</sup>Lze mluvit také o tzv. *atrakční* (též *přitahující*) množině, která je ovšem méně obecným pojmem. Vysvětlení viz [40].

Pro každou limitní množinu existuje tzv. *bazén přitažlivosti*, který definujeme v následující kapitole 2.3.4. Základní typy limitních množin jsou následující:

- *limitní bod*, popřípadě množina bodů (viz obr. 2.12a),
- *limitní cyklus* – uzavřená trajektorie ve fázovém prostoru (tzv. *orbit*, viz obr. 2.12b) s určitou konečnou periodou,
- *kvaziperiodická množina* – složitější množina s nekonečně dlouhou periodou, která je stabilním druhem chování<sup>11</sup>,
- *chaotický atraktor* – popř. také *podivný*, nejsložitější limitní množina (viz [57]), zpravidla nekompaktní, která se vyznačuje nestabilním chováním systému<sup>12</sup> (viz obr. 2.12c).



Obrázek 2.12: Znázornění limitních množin v trojrozměrném fázovém prostoru

V kontextu rozdělení možných ustálených stavů systému (kapitola 2.2.7) lze říci následující: Limitní bod je statickým stavem systému. Limitní cyklus je periodickým chováním systému. Ustálí-li se systém do limitního bodu či limitního cyklu, mluvíme také o *stacionárním stavu* systému. Chaotické chování je aperiodickou odezvou a kvaziperiodické chování je zvláštní množinou na rozhraní mezi periodickou a aperiodickou odezvou.

Mezi popsányi limitními množinami obecně existuje jistá souvislost prostřednictvím vývoje systému při změně jeho parametru. Této souvislosti se budeme věnovat v kapitole 3.

Podivný atraktor je velmi složitý útvar s komplikovanou vnitřní strukturou. Jeho výstižné znázornění je pochopitelně obtížné. Na obrázku 2.12c je proto ukázán jen s pomocí jeho obálky. Svoji podstatou je téměř každý chaotický atraktor fraktál, viz kapitola 2.3.5.

### 2.3.4 Bazén přitažlivosti

Množina všech bodů ve fázovém prostoru, pro které platí, že trajektorie jimi procházející jsou zachyceny danou limitní množinou, se nazývá bazén přitažlivosti této limitní množiny. Pokud

<sup>11</sup>Stabilním chováním rozumíme vývoj systému takový, že malá změna počátečních podmínek způsobí pouze malou změnu trajektorie systému, tj. dvě vzájemně blízké trajektorie se od sebe významně nevzdalují.

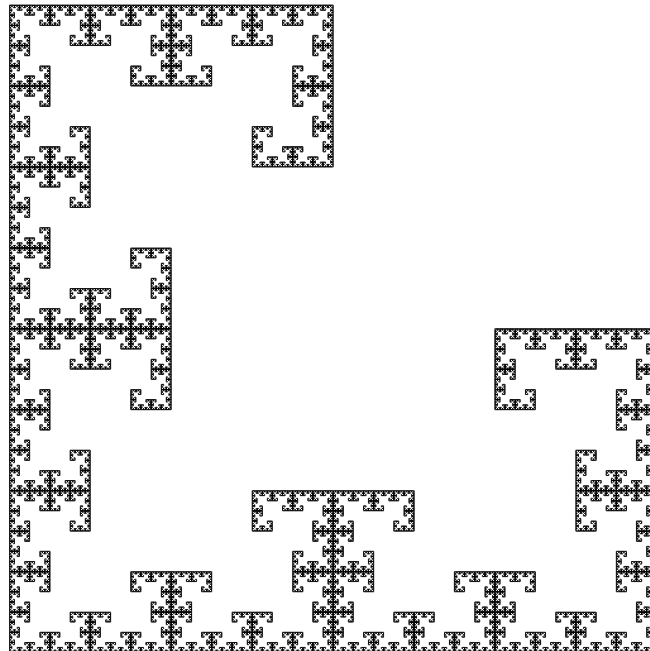
<sup>12</sup>Nestabilním chováním rozumíme vývoj systému takový, že dvě vzájemně blízké trajektorie se od sebe exponenciálně rychle vzdalují. Exponent rychlosti vzdalování trajektorie se nazývá *Ljapunovův*, viz kapitola 4.1.5.

známe všechny bazény přitažlivosti ve fázovém prostoru, víme, jaké počáteční podmínky<sup>13</sup> jsou zapotřebí pro dosažení zvolené limitní množiny.

Rozhraní bazénů přitažlivosti může být fraktální množina, v jejíž „blízkém“ okolí pak určení cílové limitní množiny nemusí být jednoznačné.

### 2.3.5 Fraktály

V 19. století začali matematikové seriózně zkoumat objekty, které věda navzdory jejich převládajícímu výskytu v našem okolí dlouho nebrala na vědomí. Tyto množiny byly dlouho považovány za „matematická monstra“, která nelze použít k popisu přírodních jevů. Definic fraktálů je mnoho, nejčastěji se však v aplikovaných vědách používá definice prostřednictvím tzv. *soběpodobnosti*. Fraktálem je pak objekt s touto vlastností. Zjednodušeně řečeno, každá dílčí část fraktálu je *topologicky ekvivalentní* celé fraktální množině. Zvětšováním fraktálu neroste ani neklesá jeho složitost.



Obrázek 2.13: Jednoduchý matematický fraktál – modifikace tzv. *C křivky*

Příklad takového útvaru lze vidět na obr. 2.13. Fraktály mají typicky *neceločíslnou dimenzi* – tzv. *fraktální dimenzi*, viz kapitola 4.1.5. Například zde zobrazený útvar se rozkládá v konečné ploše, ale neobsahuje žádné plošné části, jejichž plochu bychom mohli měřit. Obdobně pokus změřit délku linie potřebnou k jeho úplné reprezentaci nebude konvergovat k žádné konečné hodnotě. Objekt tedy není plošný a nelze ani změřit jeho délku (přesněji je délka nekonečná). Pro jeho *kapacitní dimenzi*  $d_c$  (definovanou vztahem (4.4)) platí  $1 < d_c < 2$ . Výpočtem je možno zjistit přesnou hodnotu, která činí přibližně  $d_c = 1.585$ , viz vztah (4.6) v kapitole 4.1.5.

<sup>13</sup>Připomeňme, že fázový prostor lze chápat jako prostor možných počátečních podmínek.

## 2.4 Teorie katastrof

Tato poměrně nová teorie (THOM 1972) se zabývá vlastnostmi množin parametrů dynamických systémů, při kterých dochází ke *kvalitativním změnám* stavu systému. Takové množiny se nazývají *katastrofické* a THOM dokázal, že za určitých předpokladů existuje pouze sedm elementárních typů těchto katastrofických množin. Teorii katastrof lze považovat za zobecnění problému hledání extrémů hladkých zobrazení. Vychází z *Whitneyovi teorie singularit* a dnes se považuje za speciální případ *teorie bifurkací*. Teorie bifurkací je nedílnou součástí teorie dynamických systémů.

Teorie katastrof např. ukazuje, že typická kvalitativní změna stavu se děje skokem a je závislá na historii systému. Z hlediska této práce, právě kvalitativní změna stavu a proces, který ji provází, je nelineárním jevem. Pojednání o teorii katastrof lze nalézt např. v [3], [36].



## Kapitola 3

# Nelineární jevy a nelineární chování

Obecně platí, že je obtížné (ne-li nemožné) vytvořit mechanickou konstrukci, o které bychom mohli říci, že je její chování lineární. Toto tvrzení lze obhájit především tím, že známe elementární vlastnosti hmoty, ze které konstrukce tvoříme. Víme totiž, že libovolný materiál podléhá ve své podstatě zákonitostem, které unikají jednoduchému (natož lineárnímu) popisu. Oproti tomu lze však také obecně říci, že je možné vytvořit mechanickou konstrukci, která se bude, v předem zvoleném rozsahu, chovat *přibližně* lineárně.

Při projektování a stavbě konstrukcí existuje snaha co nejméně se odchylovat od požadavku jednoduché lineární odezvy konstrukcí, zejména s ohledem na bezpečnost a předvídatelnost chování takové konstrukce. Právě důsledná předvídatelnost je v současnosti podmínkou, která by měla být při projektování splněna. Tato podmínka u nelineárních systémů nemusí být splněna, jelikož jim je vlastní:

- možnost náhlé změny stavu při spojitě změně parametrů systému. Tuto náhlou změnu stavu nazveme *nelineárním jevem*,
- možnost vzniku *nestabilního chování*, při němž je předvídatelnost vývoje systému silně omezena.

Možnost náhlé změny stavu a možnost vzniku chaotického chování patří k tzv. *generickým vlastnostem* nelineárních systémů. Tj. tyto fenomény nejsou zapříčiněny nějakým vnějším nepoznaným faktorem, ale jsou vnitřní vlastností deterministického systému.

### 3.1 Nelineární jevy ve statických úlohách

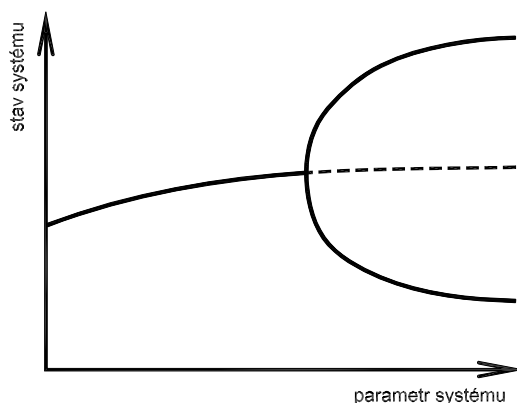
Jednodušší skupinou nelineárních jevů jsou události při vývoji konstrukce, které je možné popsat s pomocí *statických stavů*, jež jsou ve fázovém prostoru reprezentovány tzv. *pevnými body*<sup>1</sup>. Úloha poznání jevu je tím značně zjednodušena, jelikož můžeme abstrahovat od způsobu (zákonitostí), jakým konstrukce v čase mění svůj tvar. Uvedme příklady častých nelineárních jevů, spadajících do této kategorie.

---

<sup>1</sup>Statický stav systému lze výpočetně nalézt mimo jiné statickým řešením konstrukce. Myslíme tím hledání klidového rovnovážného stavu systému konstrukce – zatížení.

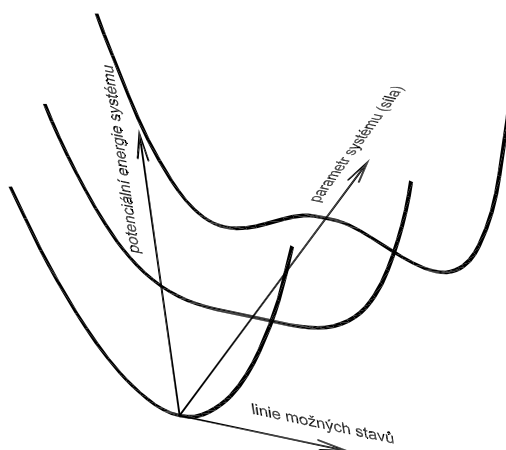
### 3.1.1 Bifurkace statického stavu

Při spojitě změně parametrů systému, jenž se nachází původně ve stabilním statickém stavu<sup>2</sup>, může dojít k náhlé ztrátě jeho stability. Omezíme-li se na pružná posunutí, pak se tato ztráta stability často u mechanických konstrukcí projevuje jako tzv. bifurkace – rozdvojení, viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Bifurkace statického stavu

Příčinou tohoto rozdělení je rozdělení „linie“ možných stavů na dvě části, kde předělem je statický stav, jenž ztratil stabilitu. Tento nestabilní statický stav v tomto případě implikuje existenci stabilních statických stavů v jeho okolí. Je zde přímá souvislost se vzrůstem potenciální energie systému při vzdalování se od oblasti výskytu možných statických stavů (z podmínky spojitosti pak vyplývá existence minim potenciální energie), viz obr. 3.2.



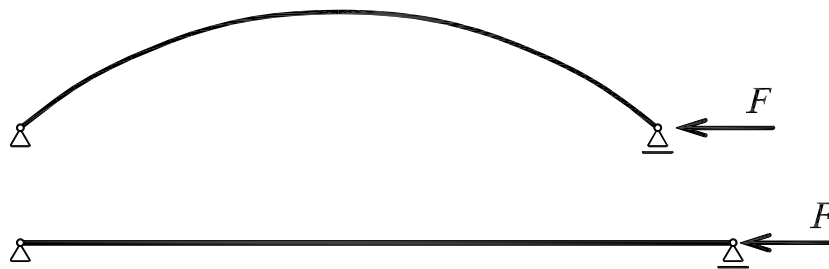
Obrázek 3.2: Vývoj potenciální energie systému s bifurkací při změně parametru

<sup>2</sup>Stabilním statickým stavem rozumíme stav, do něhož systém spěje při libovolném malém vychýlení z tohoto stavu. Nestabilním statickým stavem rozumíme stav, od něhož se systém rychle vzdaluje při malém vychýlení. Poznamenejme, že stabilní statický stav se ve fázovém prostoru projevuje jako limitní bod.

Na obrázku 3.2 je vidět trojice funkcí potenciální energie systému (závislých na vybraném stavu z linie možných stavů) kvalitativně se měnící při vývoji systému. Prostřední funkce znázorňuje předělový okamžik – bifurkační bod. Při limitním přibližování se k tomuto bodu roste poloměr křivosti funkce potenciální energie pro statický stav nadevšechny meze. Tento problém je příčinou nestability numerických metod použitých pro řešení této úlohy. Úlohu lze tak použít pro test stability zvolené numerické metody (tedy i algoritmu). Lze říci, že čím je oblast stability numerické metody větší, tím vhodnější je tato metoda pro řešení této úlohy.

### Vzpěr ideálního prutu

Bifurkace statického stavu je v mechanice známa zejména z problematiky vzpěru ideálního prutu. Dokonale přímý prut je zatěžován pozvolna vzrůstající tlakovou silou působící ve směru spojnice konců prutu, viz obr. 3.3. Při nízkých hodnotách osového tlaku existuje pouze jedno stabilní řešení, kterým je přímý tvar prutu<sup>3</sup>. Je-li ovšem dosažena jistá kritická hodnota osového tlaku, stává se toto řešení nestabilním a vznikají dvě nová stabilní řešení oddělená nestabilním řešením, kterým se stal (původně stabilní) přímý tvar prutu.



Obrázek 3.3: Vzpěr ideálního prutu – pokritický a prekritický stav prutu

Dosažení kritické síly – bifurkačního bodu – lze výstižněji znázornit s pomocí plochy potenciální energie systému, jejíž řezy byly zobrazeny schématem na obrázku 3.2. Prostorové znázornění této energetické plochy včetně vrstevnic je vidět na obr. 3.5.

Poznamenejme, že užité zobrazení *parametrizované energetické plochy* lze získat nejlépe díky systému s jedním stupněm volnosti<sup>4</sup>. Výhodné je přímé užití jednostupňového modelu prutu (viz např. [17]). Prut je nahrazen dvěma tuhými dílci spojenými kloubem s lineární rotační pružinou, viz obr. 3.4. Potenciální energii  $\Pi$  tohoto modelu lze zapsat ve tvaru:

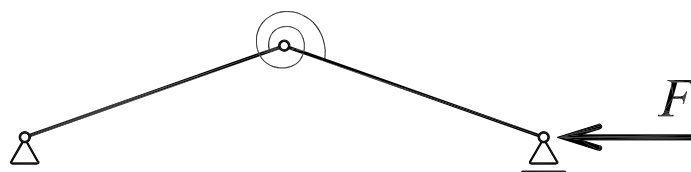
$$\Pi(\varphi, F) = 2k\varphi^2 - Fl(1 - \cos\varphi), \quad (3.1)$$

kde  $l$  je délka prutu,  $k$  je tuhost rotační pružiny,  $\varphi$  je pootočení tuhého dílce a  $F$  je zatěžující síla. Pro bifurkační bod – kritickou sílu  $F_{cr}$  – v tomto případě platí:

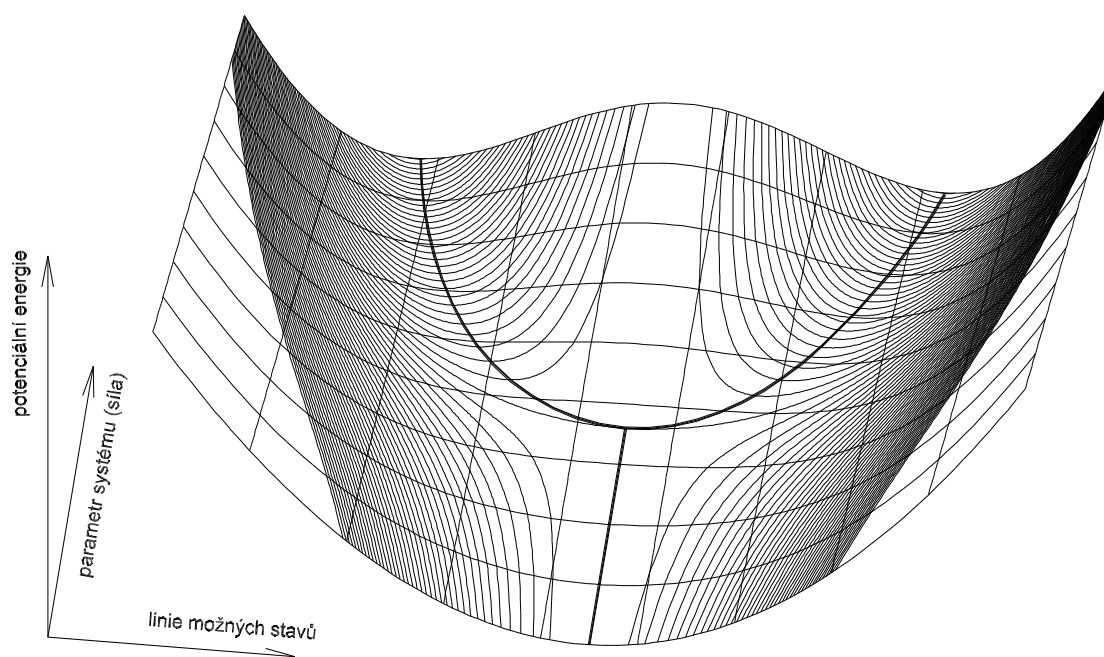
$$F_{cr} = 4k/l. \quad (3.2)$$

<sup>3</sup>Poznamenejme, že odhlížíme od globálně stabilního řešení, jímž je tažený prut (tvořil by druhé stabilní řešení rovněž s přímým tvarem prutu).

<sup>4</sup>K dispozici máme pouze tři dimenze, přičemž první je užita pro změnu parametru systému, druhá pro potenciální energii. Zbývá tedy pouze jediná dimenze pro stav systému.



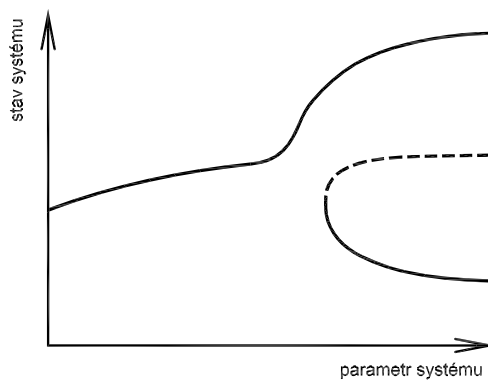
Obrázek 3.4: Vzpěr prutu – model s jedním stupněm volnosti



Obrázek 3.5: Vzpěr ideálního prutu – parametrizovaná plocha potenciální energie jednostupňového modelu

### Vzpěr reálného prutu

Ideální prut není ve skutečnosti realizovatelný. V tomto smyslu je třeba se zmínit o vlivu, který do okolí bifurkačního bodu vnáší odchylka od ideálního stavu, tzv. *imperfekce*<sup>5</sup>. Narušení symetrie (zřejmě reálně vždy přítomné) způsobí zvýhodnění jedné větve z nově vzniklých stavů (lze mluvit o stavu na straně imperfekce). Druhá větev, která je imperfekcí znevýhodněná, vzniká, spolu s nestabilním statickým stavem, poněkud opožděně a její dosažení je podmíněno vnějším zásahem. Bifurkace s narušenou symetrií je vidět na obr. 3.6.

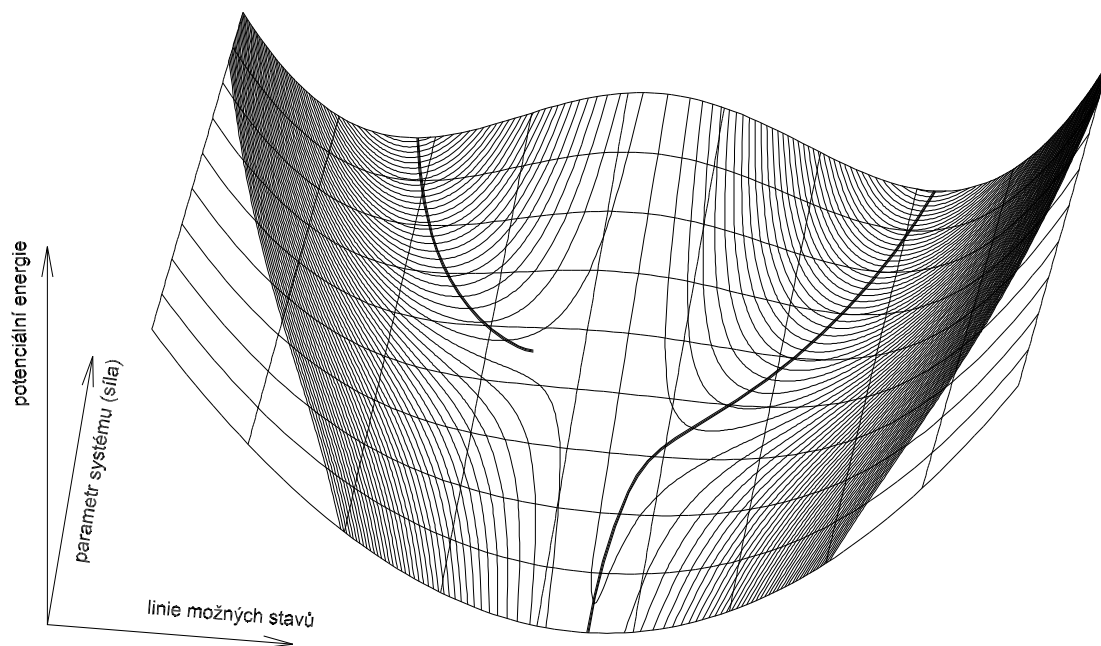


Obrázek 3.6: Bifurkace statického stavu s narušenou symetrií

Narušení symetrie úlohy se na parametrizované ploše potenciální energie projeví méně dramaticky, než jak vidíme na prostém zobrazení statických stavů (obr. 3.6), viz obr. 3.7. Pro zobrazení této plochy byl užit modifikovaný jednostupňový model popsany výše. Modifikace spočívala v zavedení imperfekce odpovídající počátečnímu zakřivení prutu – počátečnímu pootočení  $\varphi_0$ . Výraz pro potenciální energii  $\Pi$  pak přejde na:

$$\Pi(\varphi, F) = 2k(\varphi - \varphi_0)^2 - Fl(1 - \cos \varphi). \quad (3.3)$$

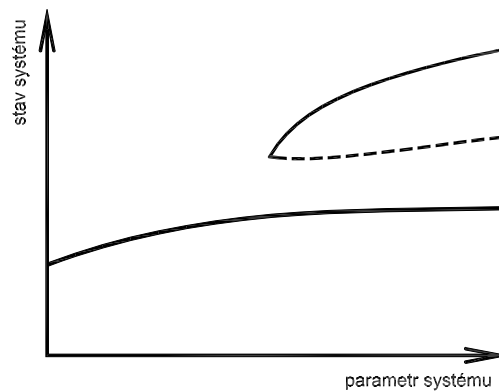
<sup>5</sup>Za imperfekci lze považovat jakékoliv narušení symetrie bifurkace. V tomto případě je myšlena libovolná *malá* nesymetrie úlohy vzhledem k vybočení prutu.



Obrázek 3.7: Vzpěr reálného prutu – parametrizovaná plocha potenciální energie jednodušňového modelu

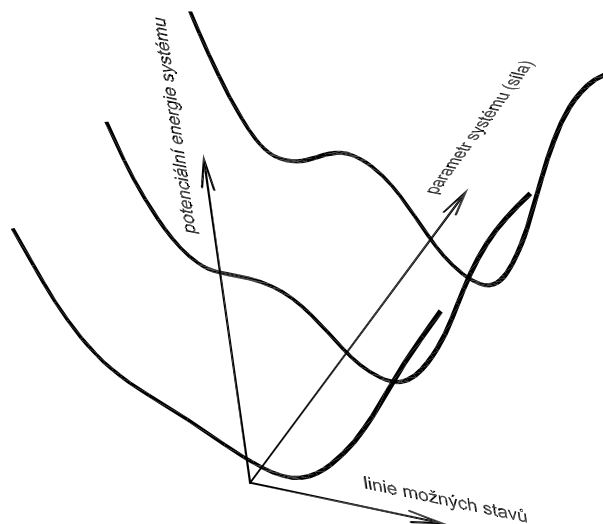
### 3.1.2 Vznik/zánik statického stavu

Při změně parametru systému, jenž se nachází ve statickém stavu, může dojít také k náhlému vzniku či zániku stabilního statického stavu. Tento vznik či zánik může existovat v jistém smyslu nezávisle na původním statickém stavu (přítomnost tohoto nelineárního jevu tedy nemusí být patrná), viz obr. 3.8. Omezíme-li se na pružná posunutí, pak je tento vznik/zánik nového statického stavu doprovázen vznikem/zánikem nestabilního statického stavu z důvodu požadavku spojitosti plochy potenciální energie.



Obrázek 3.8: Vznik resp. zánik řešení

Příčina vzniku nového stabilního statického stavu je vzdáleně podobná příčině vzniku bifurkace. Také zde vzniká zvlnění funkce potenciální energie, ovšem s tím rozdílem, že toto zvlnění se odehrává daleko od původně osamělého statického stavu, který tak neztrácí svou stabilitu.



Obrázek 3.9: Vývoj potenciální energie systému při změně parametru

Na obrázku 3.9 je opět vidět trojice funkcí potenciální energie systému. Na první funkci je patrné počínající zvlnění, které se v okamžiku vzniku nového statického stavu stává inflexí s nulovým sklonem – prostřední funkce. Třetí funkce již zřetelně obsahuje tři statické stavy<sup>6</sup>.

Tento nelineární jev a jeho nalezení přímo souvisí s problematikou určení počtu možných statických stavů. Obecně totiž nelze říci kolik existuje statických stavů mechanické konstrukce pro jednu její konfiguraci (konkrétní množinu parametrů).

Poněkud jednodušší situací, z hlediska nalezení jiného stabilního statického stavu, je sledování zanikajícího statického stavu. V okamžiku zániku tohoto stavu totiž může dojít (v případě omezení se na pružnou odezvu) k přeskoku na jiný statický stav.

Okamžik zániku stabilního statického stavu je zajímavý také tím, že je doprovázen kontaktem zanikajícího stabilního statického stavu se „sdruženým“ nestabilním statickým stavem, viz obr. 3.8.

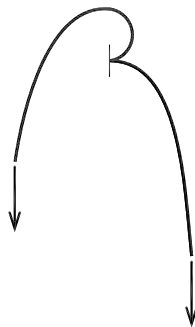
### Ohyb konzolového nosníku

Jednoduchým příkladem výskytu vzniku nového stabilního statického stavu je úloha ohybu štíhlého konzolového nosníku, zatíženého příčnou silou na jeho volném konci, viz obr. 3.10.



Obrázek 3.10: Ohyb konzolového nosníku

Při zvyšování velikosti zatěžující síly vzniká nový statický stav, viz obr. 3.11. Problém existence více stabilních statických stavů pro tuto úlohu byl prezentován např. v [20].



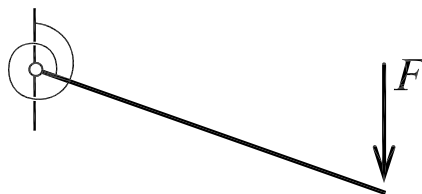
Obrázek 3.11: Dva stabilní statické stavy pro jednu konfiguraci systému

Obdobně jako v předchozí kapitole i zde je možno vytvořit jednoduchý jednostupňový model této úlohy, jenž nám umožní konstruovat parametrizovanou plochu potenciální ener-

<sup>6</sup>Popsanou situaci lze velmi dobře připodobnit k bifurkaci s velmi velkou imperfekcí. Existuje zde jistý „rozmazaný“ přechod mezi bifurkací statického stavu a vznikem nového statického stavu zkrze imperfekci. Srovnaj energetické plochy obr. 3.7 a obr. 3.13



gie systému. Nosník lze nahradit tuhým dílcem připojeným k vetknutí kloubem s rotační pružinou, viz obr. 3.12.



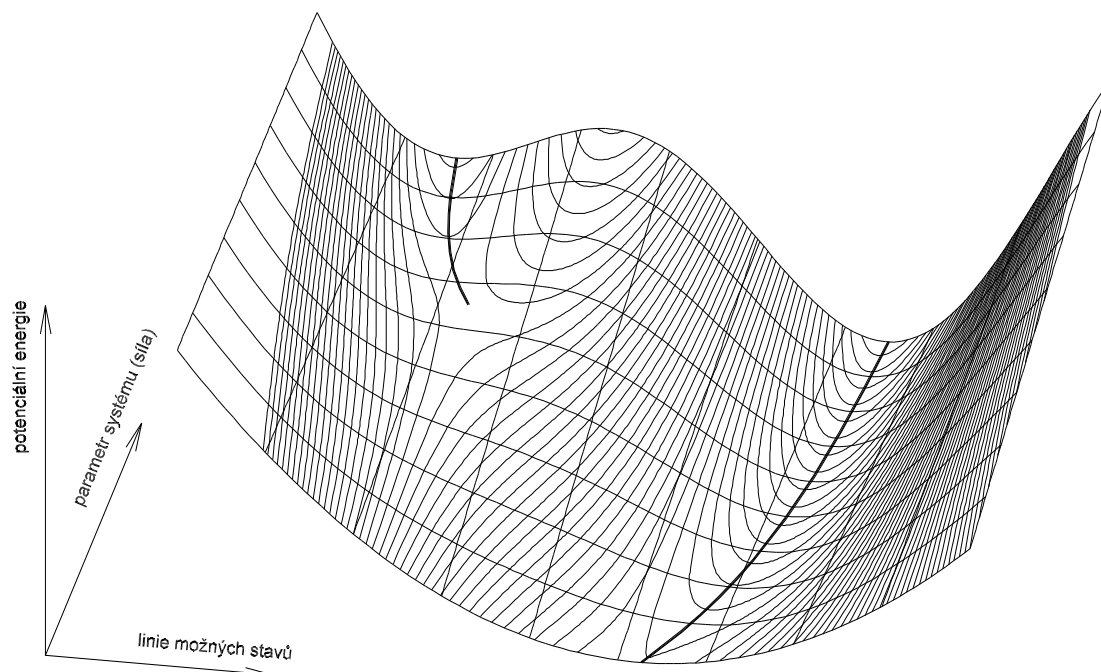
Obrázek 3.12: Jednostupňový model ohybu konzolového nosníku

Potenciální energii  $\Pi$  tohoto jednostupňového modelu lze zapsat například ve tvaru:

$$\Pi(\varphi, F) = \frac{1}{2}k\varphi^2 - Fl \sin \varphi, \quad (3.4)$$

kde  $l$  je délka nosníku,  $k$  je tuhost rotační pružiny,  $\varphi$  je pootočení tuhého dílce a  $F$  je zatěžující síla.

Průběh parametrizované plochy potenciální energie tohoto modelu v okolí vzniku nového statického stavu je vidět na obr. 3.13.



Obrázek 3.13: Ohyb konzolového nosníku – parametrizovaná plocha potenciální energie jednostupňového modelu

## 3.2 Nelineární jevy v dynamických úlohách

Obecnějším pohledem na mechanické konstrukce, o to však složitějším, jsou *dynamické úlohy*. To, co ve statických úlohách bylo problémem – např. sledování ztráty stability či zániku statického stavu – je zde řekněme běžnou záležitostí. Nicméně zjistíme, že některé jevy si budou do jisté míry odpovídat. Oproti statickým úlohám přibude zejména nelineární chování, které je pevně svázáno s pohybem mechanické konstrukce<sup>7</sup>.

Je třeba si uvědomit zásadní odlišnost dynamiky nelineárních systémů od dynamiky lineárních systémů. Hlavním rozdílem je *bohatost* projevů nelineárních systémů, která patří rovněž k jejich generickým vlastnostem. Je zde patrný jistý posun ve složitosti. Tato bohatost s sebou přináší komplikace s identifikací nelineárních projevů, kterými se zde také budeme zabývat.

Jak odlišné je chápání pohybu v nelineárních dynamických systémech, je patrné z následujících vět: Mluvíme-li zde o stavu dynamického systému, nemyslíme tím okamžitý stav systému v daném čase, ale stav pohybu tohoto systému<sup>8</sup>. V extrémním případě je samotný statický stav chápán jako rovnovážný výsledek pohybu.

Mnohé z nelineárních projevů jsou natolik význačnou událostí na konstrukci, že je lze považovat za měřítko výstižnosti modelu, kterým se snažíme konstrukci reprezentovat. Uvedme tedy nejběžnější projevy se kterými se můžeme setkat při sledování nelineárních dynamických systémů.

### 3.2.1 Bifurkace v dynamické úloze

Bifurkace jsou jedním z nejdůležitějších projevů nelineárních dynamických systémů. Dochází k nim při plynulé změně jejich parametrů. Umožňují nám posoudit kvalitu modelu vzhledem k modelovanému objektu<sup>9</sup>. Bifurkací je více druhů a navíc provázejí vznik dalších nelineárních projevů.

Bifurkace zaznamenáváme zejména pomocí změn stacionárních stavů. Lze je znázornit v tzv. *bifurkačním diagramu* podobným způsobem jako bifurkace statického stavu popsaného v předešlé kapitole 3.1.1. Bifurkační diagram samotný bude vysvětlen později v kapitole 4, jako jedna z metod sledování nelineárních jevů. Již z předešlých zmínek o bifurkaci víme, že ze samotné podstaty se systém vždy v blízkosti bifurkačního bodu projevuje do jisté míry nestabilně.

### Hopfova bifurkace

Hopfova bifurkace provází zrod/zánik limitního cyklu z limitního bodu. Ilustraci této bifurkace můžeme vidět na obr. 3.14.

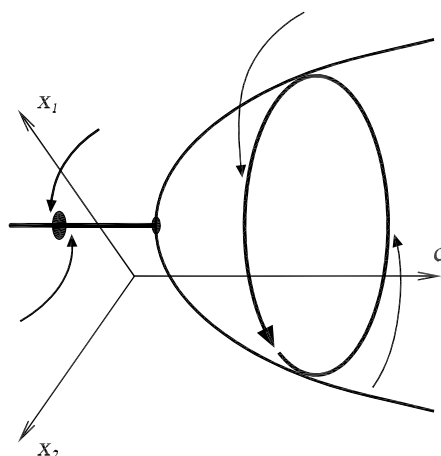
---

<sup>7</sup>Pokud budeme chtít zaznamenat a identifikovat dynamický jev, musíme sledovat pohyb konstrukce dostatečně jemně v průběhu dostatečného časového období (více o metodách sledování jevů je uvedeno v kapitole 4). Tento požadavek je ještě silnější, sledujeme-li pohyb reálné konstrukce. Poznamenejme tedy, že zde samozřejmě přibyla časová dimenze.

<sup>8</sup>Pojmy jsou zde více svázány s pohybem jako základním prvkem. Například *stacionárním stavem* (tj. v čase neproměnným) je myšlen ustálený pohyb systému na jednoduché limitní množině (periodický pohyb či statický stav).

<sup>9</sup>Modelovaným objektem může být samotná konstrukce, jiný model, výsledek jiné užití výpočetní metody či dokonce jen jiná diskretizace.

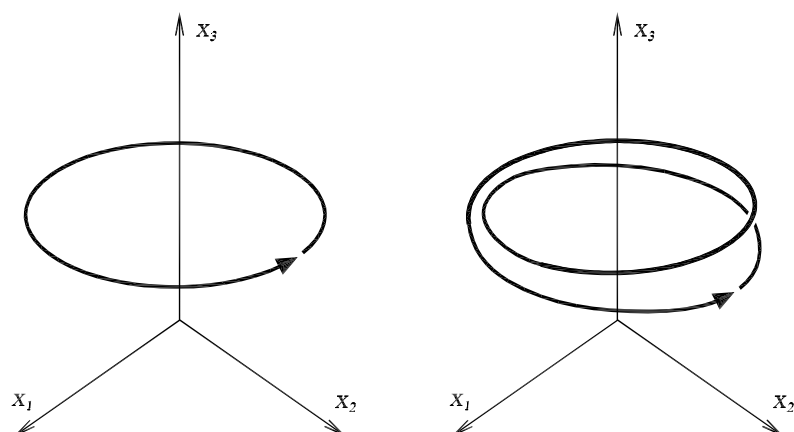
Výskyt Hopfovy bifurkace lze zjistit např. u vzpěru ideálního prutu. Máme-li normálově tuhý prut zatížený normálovým periodickým zatížením, pak při nízké hodnotě zatížení bude stacionárním stavem limitní bod odpovídající přímému tvaru prutu. Dosáhneme-li určité vyšší hladiny zatížení (odpovídající kritické síle), pak již přímý tvar nebude stabilní a dojde ke zrodu limitního cyklu odpovídajícímu pokritickému kmitání prutu.



Obrázek 3.14: Znázornění Hopfovy bifurkace ve dvourozměrném fázovém prostoru – zrodu limitního cyklu z limitního bodu. Třetím rozměrem (označen  $c$ ) je reprezentována změna parametru systému

### Bifurkace zdvojením periody

Tato bifurkace, jak již její název napovídá, způsobí zdvojení (tj. zdvojnásobení) periody limitní množiny. Původní množina se náhle rozštěpí (viz limitní cyklus na obr. 3.15), přičemž „rozštěpené části trajektorie“ se od sebe rychle lokálně vzdálí. Zdroj této bifurkace je třeba spatřovat v nárůstu nelinearity odezvy.

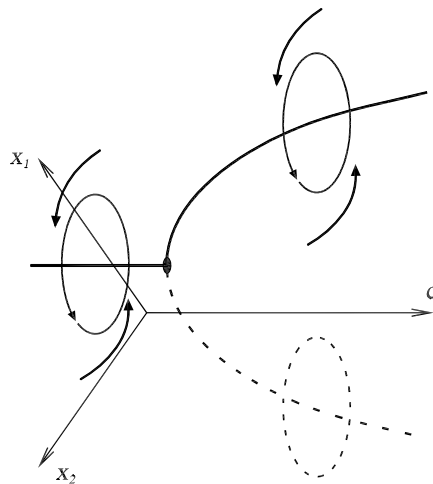


Obrázek 3.15: Znázornění bifurkace zdvojení periody limitního cyklu v trojrozměrném fázovém prostoru. Vlevo – původní limitní cyklus, vpravo – zdvojený limitní cyklus

Poznamenejme, že zdvojit se může i zdvojená limitní množina (dojde u ní k další bifurkaci). Taková následná zdvojení limitní množiny se mohou vyskytovat pravidelně. Mluvíme pak o tzv. *kaskádě bifurkací*, které se budeme zvlášť věnovat v kapitole 3.2.3.

### Superkritická vidličková bifurkace

Tato bifurkace svým charakterem odpovídá bifurkaci popsané ve statických úlohách (kapitola 3.1.1). Dojde-li u dynamického systému k této bifurkaci, pak systém přejde do jedné ze dvou možných větví. Tento proces je ilustrován na obr. 3.16. Z toho je ihned zřejmé, že zároveň existují minimálně dvě limitní množiny<sup>10</sup>.



Obrázek 3.16: Znázornění superkritické bifurkace v dvourozměrném fázovém prostoru (čárkovaně je znázorněna rovnocenná druhá stabilní větev)

Také zde se projevuje ztráta symetrie bifurkace způsobem popsaným ve zmíněné kapitole 3.1.1 ze statických úloh. Jedna větev bude imperfekcí zvýhodněná a druhá znevýhodněná. Navíc lze popsaný statický systém – vzpěr prutu – opět použít jako příklad výskytu této bifurkace.

Mějme ideální prut zatížený ve vzpěru v čase neproměnnou silou. Nechť je na prutu také jiné, např. harmonické zatížení, působící příčně (dochází k ohybu prutu). Situace na obr. 3.16, pak může odpovídat dosažení kritické hodnoty vzpěrné síly (která je v čase neproměnná). Tj. bude-li prut vzhledem k vzpěrné síle v prekritickém stavu, pak se ustálí do jediného limitního cyklu. Překročí-li tato síla kritickou hodnotu, pak dojde k vybočení prutu s tím, že prut může nadále kmitat na jedné či na druhé straně (v rovinném případě) vlivem stále působícího „malého“ příčného harmonického zatížení.

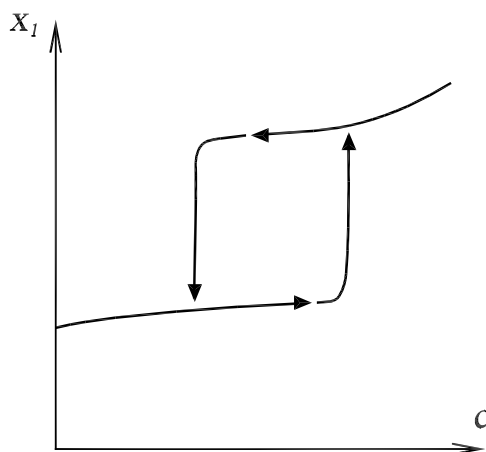
<sup>10</sup>Existují minimálně dvě limitní množiny proto, že kromě dvou větví bifurkace může existovat ještě jiná limitní množina na bifurkaci nezávislá.

### 3.2.2 Vznik/zánik limitní množiny

Limitní množiny dynamických systémů mohou vznikat či zanikat při změnách parametrů<sup>11</sup>. Příčiny a průběh těchto *katastrof* mohou být různé. To co je spojuje bývá dramatický nástup a průběh takového děje. Dostává-li se systém k takovému bodu, pak pochopitelně ztrácí stabilitu. Přesnost zmapování okamžiku vzniku/zániku limitní množiny je dána především velikostí skoku změny klíčového parametru. Příčinou tohoto faktu je množství potenciální/kinetické energie, která se uvolní při změně tohoto parametru.

#### Hysterezní smyčka

Vznik/zánik limitní množiny je často doprovázen hysterezní smyčkou. Existují-li zároveň dvě limitní množiny, které obě zanikají při přechodu na tu druhou limitní množinu, pak např. zvyšováním klíčového parametru zmapujeme přechod první množiny na druhou a opačně snižováním parametru zmapujeme přechod druhé množiny na první. Jelikož pro určitý interval parametru existují obě množiny zároveň, dostáváme hysterezní smyčku, viz obr. 3.17.



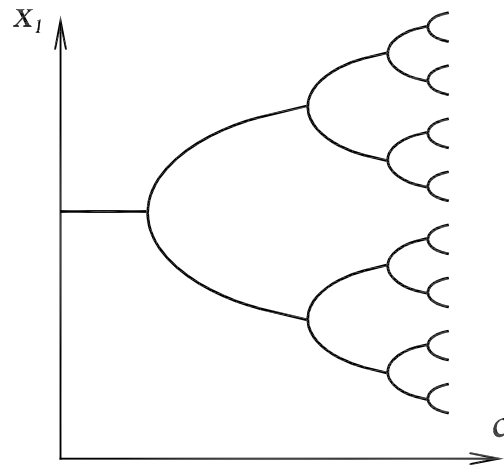
Obrázek 3.17: Znázornění hystereze při přechodech mezi dvěma limitními body

### 3.2.3 Kaskáda bifurkací

Kaskáda bifurkací je velmi působivým prvkem nelineárních systémů. Lze ji popsat jako posloupnost bifurkací jednoduché limitní množiny při změně parametru systému, viz obr. 3.18. Původně „jednoduchá“ limitní množina opakovanou bifurkací zdužňuje svoji periodu. Po mnoha bifurkacích, které se vyskytují stále častěji, můžeme obdržet kvaziperiodickou limitní množinu a posléze chaotické chování.

U většiny kaskád bifurkací lze vysledovat, že délka intervalu mezi po sobě jdoucími bifurkačními body této kaskády tvoří konvergující posloupnost. Podíl délek následujících intervalů může konvergovat k univerzální konstantě, tzv. *Feigenbaumovu číslu*, které má hodnotu přibližně 4.66920, viz [26], [40].

<sup>11</sup>Vznikem či zánikem limitní množiny zde není myšlena změna jejího charakteru bifurkací.



Obrázek 3.18: Znázornění kaskády bifurkací limitního bodu

Nepřítomnost této kaskády může ukazovat na velmi rozvinutý nelineární dynamický systém. Existence kaskády a její struktura je zpravidla patrná ve struktuře chaotického atraktoru vzniklého touto kaskádou.

### 3.2.4 Chaotické chování

Chaotické chování deterministického dynamického systému je rozhodně fenoménem se zvláštními vlastnostmi. Svůj název dostalo od slova, které vždy symbolizovalo neřád, tj. nepřítomnost řádu. Zkoumáním chaotických atraktorů – tzv. *podivných* limitních množin – lze ovšem zjistit, že nepřítomností řádu tyto struktury rozhodně netrpí, viz obr. 3.19. Naopak, forma uspořádanosti chaotických atraktorů je v jistém smyslu vyšší formou řádu, viz [46].

Chaotické chování je nestabilním pohybem v omezené oblasti fázového prostoru. Je charakteristické tím, že původně blízké trajektorie se lokálně exponenciálně rychle vzdalují – tomuto efektu se říká *strečing* (natahování). A zároveň globálně, z hlediska rozměru atraktoru, zůstávají stále ve své blízkosti – díky efektu s názvem *foldng* (přehýbání). Výsledkem těchto dvou efektů je nekonečně zvrásněná plocha, po které se pohybuje nekonečná trajektorie, aniž by se kdy protнула. Tento typ často se vyskytujícího chaotického chování je topologicky ekvivalentní tzv. *pekařské transformaci*, viz např. [34], která názorně vystihuje jeho povahu.

Protože je chaotické chování nestabilní, tak nelze jednoduchým způsobem rozhodovat o stabilitě numerických metod pro řešení odpovídajícího dynamického systému. Libovolně malá změna jakéhokoliv vstupu (počáteční podmínky, metoda řešení, způsob reprezentace čísel, atd.) nevyhnutelně vede k odlišným výsledkům. Pokud chceme posoudit stabilitu řešení při chaotickém pohybu, je třeba sledovat strukturu samotného atraktoru. Nemění-li se jeho struktura při změně vstupů, pak lze usuzovat na stabilitu řešení.

Skutečnost praktické neopakovatelnosti a nepředvídatelnosti trajektorie při pohybu na chaotickém atraktoru vede k algoritmickým obtížím s jeho identifikací. Existují případy, kdy je v současnosti jediným spolehlivým identifikačním prostředkem pouze lidský mozek, viz např. [41].



Obrázek 3.19: Řez chaotickým atraktorem, který je produktem silně nelineárního dynamického systému se třemi stavovými proměnnými

## Kapitola 4

# Sledování nelineárních jevů

V předcházejících kapitolách jsme uvedli různé nelineární projevy, ke kterým může docházet při vývoji stavu mechanických konstrukcí. Známe nyní podstatu některých jevů, ale mohou nám chybět účinné metody jejich sledování. Tato kapitola se bude věnovat používaným metodám zobrazování stavu a vývoje systémů založených většinou na použití fázového prostoru.

Řešíme-li dynamický model reálné konstrukce, pak máme často k dispozici velmi mnoho údajů vyjadřující stav systému v čase. Model má zpravidla mnoho stavových proměnných (dle počtu stupňů volnosti), aby dobře vystihoval chování dané konstrukce. Víme, že počet stavových proměnných nám určuje dimenzi fázového prostoru. Tento fakt činí přímé zobrazení trajektorie obtížným, vzhledem k tomu, že jsme schopni vnímat jen tři prostorové dimenze. Prvním problémem je tedy zobrazení ve vícerozměrném fázovém prostoru.

Vyvíjí-li se dynamický systém v čase, pak často dochází k hustému zaplnění oblasti fázového prostoru trajektorií. Těžko pak zjišťujeme, co se s ním stalo. Problémem druhým je proto rozpoznání stavu a změny stavu systému.

Třetí problém je správná interpretace výsledků experimentu či numerického výpočtu. Protože například z podstaty nelinearity systému víme, že může mít více limitních množin při stejné konfiguraci systému. Dále také může být obtížné odlišit chaotické chování od přechodového stavu, apod.

Z popsaných potíží je vidět komplexnost poznávání systému. Situaci nám jistě zjednoduší zaměření se na dílčí části. Z hlediska toho jaké informace chceme o systému získat, můžeme provést následující rozdělení (řazeno podle náročnosti):

- sledování systému pro jeho jedinou konfiguraci – závislost chování systému na počátečních podmínkách,
- vývoj ustálených stavů systému při změně parametrů – hledání bifurkací, chaotického chování, atd.,
- sledování přechodových dějů – ustalování systému, stabilita ustálených stavů, apod.

### 4.1 Zobrazování ve fázovém prostoru

Již jsme uvedli, že většina účinných metod sledování systému užívá prostor všech možných stavů systému, kde se jeho vývoj zobrazuje jako spojitá parametrická křivka – trajektorie.



Výhodou tohoto přístupu je, že se chování systému v tomto prostoru podobá běžným zkušenostem. Dochází-li k ustalování systému, pak se trajektorie ve fázovém prostoru „usadí“ v určité jeho části – limitní množině, což se často velmi podobá misce, v níž krouží kulička. Je-li tato miska složitá, lze očekávat složitý pohyb kuličky – chaotické chování. Dostane-li kulička příliš mnoho energie, může z misky „vyskočit“ a skončit v jiné misce, apod.

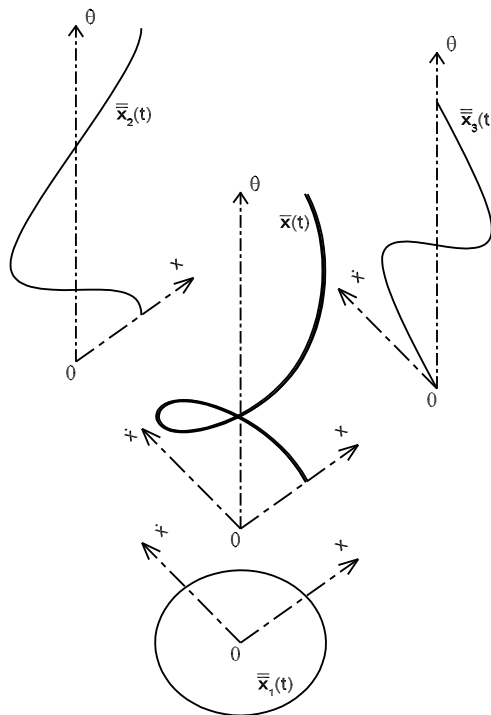
#### 4.1.1 Projekce trajektorie

Projekce trajektorie je první ze základních zobrazovacích prostředků pro snížení počtu dimenzí. Poznamenejme, že projekce je náš přirozený nástroj vnímání, jinak bychom byli doslova „zaplaveni“ množstvím informací.

Mějme  $n$ -dimenzionální dynamický systém, jehož trajektorii  $\mathbf{x}(t)$  chceme zobrazit na dvoudimenzionální plochu. Pak postačuje vybrat dvě stavové proměnné, např.  $x_i$  a  $x_j$ , které budou reprezentovány dvěma osami zobrazovací plochy. Definujme projekci trajektorie  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ :

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_j(t) \end{bmatrix}, \text{ kde } i, j \in 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

kterou vyneseme do zobrazovací plochy. Vybíráme zpravidla takové stavové proměnné, které mají největší význam. Například při ohybovém kmitání prostě uloženého nosníku (viz obr. 3.3) vybereme příčnou výchylku středu prutu a rychlost této výchylky. V případě harmonické odezvy nosníku pak bude projekcí trajektorie elipsa, viz obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Znázornění trojice projekcí ustáleného harmonického kmitání – jednoduchého limitního cyklu, kde  $x$  je výchylka,  $\dot{x}$  je rychlost výchylky a  $\theta$  je fázový úhel harmonické síly  $F(t) = A \sin \theta$

## Projekce kmitání

V této práci budeme užívat projekci zvláště vhodnou pro ohybové kmitání jednoduché rovinné konstrukce s více stupni volnosti, ale jediným dynamickým zatížením – harmonickou silou nebo harmonickým zrychlením.

V prvé řadě provedeme projekci tohoto systému takovou, že vybereme pouze jediný bod na konstrukci a jediný směr jeho pohybu. Polohu vybraného bodu ve vybraném směru označíme  $x(t)$  a rychlost změny této polohy  $\dot{x}(t)$ . Tím jsme odstranili všechny ostatní polohové stavové proměnné. Jelikož je konstrukce podrobena harmonickému zatížení, tak třetí stavovou proměnnou bude fázový úhel harmonického zatížení  $\theta(t)$ , pro který bude platit:

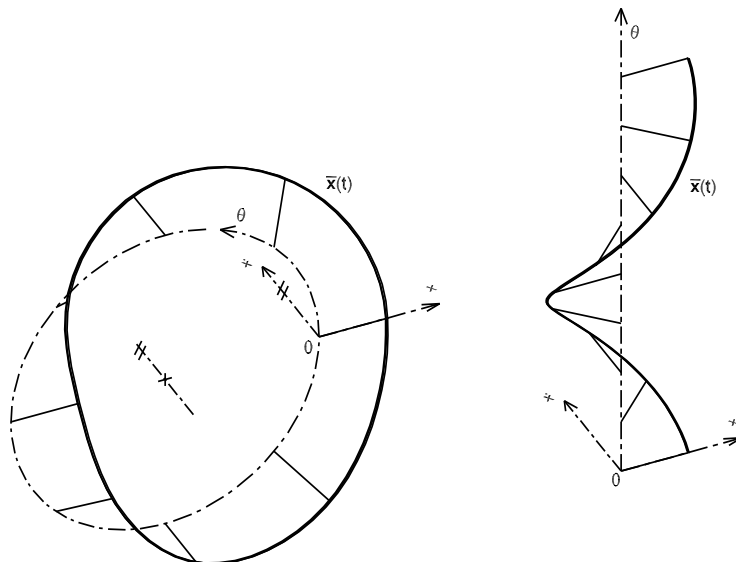
$$\theta(t) = \Omega t + \theta_0, \quad (4.2)$$

kde  $\Omega$  je úhlová frekvence harmonického zatížení a  $\theta_0$  je počáteční podmínka pro fázový úhel  $\theta$ . Obecné harmonické zatížení  $z(t)$  pak můžeme psát ve tvaru:

$$z(t) = A \sin \theta, \quad (4.3)$$

kde  $A$  je amplituda zatížení. Výsledek projekce při harmonickém ustáleném pohybu byl již vidět na obrázku 4.1 pod označením  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , přičemž lze užít další projekci označenou  $\bar{\mathbf{x}}_1(t)$  pro zobrazení do roviny. Tato projekce je vhodná zejména proto, že je zde možné velmi zřetelně a rychle odlišit změny v chování systému.

Všimněme si, že stavová proměnná  $\theta$  je tzv. *cyklická souřadnice*. Reprezentuje totiž fázový úhel. Výpočet fázového úhlu  $\theta$  tedy můžeme upravit tak, že bude platit  $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Tato úvaha je dobře ilustrovatelná geometrickou transformací na obr. 4.2.



Obrázek 4.2: Transformace kartézského souřadného systému (vpravo) do válcového souřadného systému (vlevo) vystihující cyklickou povahu stavové proměnné  $\theta$

### 4.1.2 Poincarého mapa

Poincarého mapa je druhý z nástrojů pro snížení počtu dimenzí zobrazení trajektorie systému. Zjednodušeně je Poincarého mapa řezem trajektorie ve fázovém prostoru vybranou nadplochou.

Nejčastěji se provádí řez rovinou kolmou na vybranou stavovou proměnnou, řekněme  $x_p$ . Rovnice řezné roviny tak může být ve tvaru  $x_p = a$ , kde  $a$  je průsečík řezné roviny s osou stavové proměnné  $x_p$ . Poincarého mapa trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  je pak množina všech bodů této trajektorie, pro které platí  $x_p = a$ .

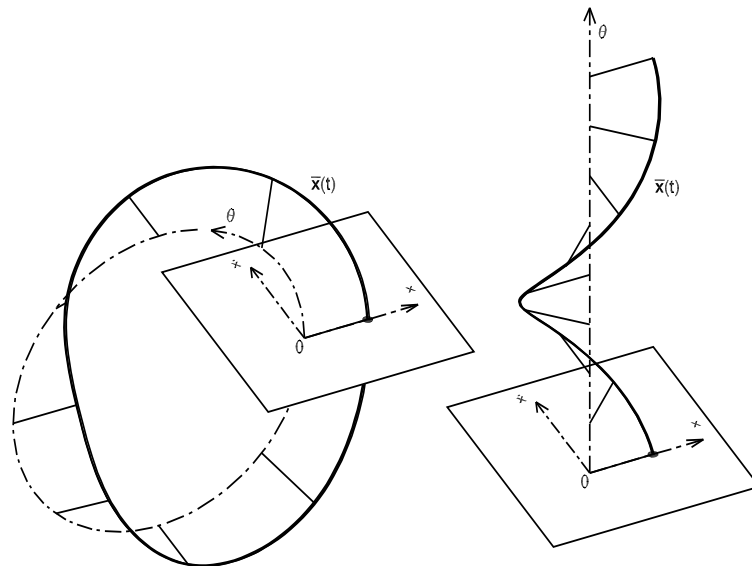
Pro vizualizaci  $n$ -dimenzionální Poincarého mapy lze užít projektivní zobrazení popsané v předchozí kapitole 4.1.1.

#### Mapa prvního návratu

Uvažovat Poincarého mapu jen jako řez trajektorií je z hlediska jejího významu nedostatečné. Poincarého mapa je totiž v teorii dynamických systémů chápána jako speciální zobrazení, které danému bodu řezu trajektorie přiřadí následující bod řezu trajektorie. Z definice dynamického systému vyplývá, že je toto zobrazení jednoznačné. Těchto vlastností Poincarého map se užívá při podrobnější analýze vícerozměrných systémů.

#### Projekce kmitání

Vraťme se ke konkrétní projekci trajektorie systému, popsané v předchozí kapitole 4.1.1. Pro kmitající konstrukci, za výše daných předpokladů, je vhodné vést řez trajektorie rovinou  $\theta = 0$ . Tento řez je ilustrován na obrázku 4.3.



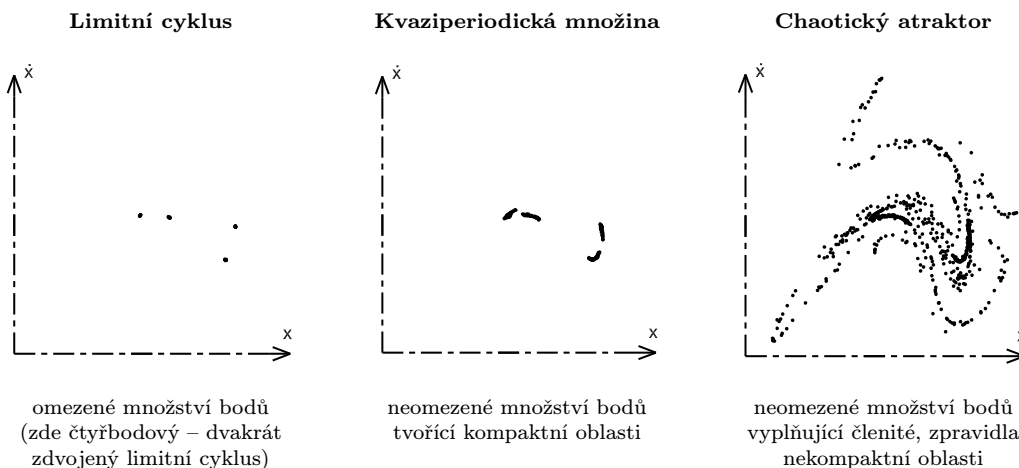
Obrázek 4.3: Ilustrace vytváření Poincarého mapy řeznou rovinou  $\theta = 0$

Na obr. 4.3 je vidět provedení řezu jednoduchým limitním cyklem rovinou  $\theta = 0$ . Vidíme také, že jednoduchý limitní cyklus bude mít v takové Poincarého mapě pouze jediný bod.

Každé zmnožení bodů či náhlá změna jejich polohy, jasně signalizuje nelineární jev.

### Identifikace limitní množiny

Jelikož je Poincarého mapa ve vybraném případě rovinným řezem trajektorie, nedochází na ní při projekci k překrývání částí trajektorie, jak je tomu u projekce trajektorie. Díky této vlastnosti se dobře hodí k identifikaci limitní množiny. V tabulce 4.1 jsou zobrazeny charakteristické Poincarého mapy limitních množin.



Tabulka 4.1: Poincarého mapy různých druhů limitních množin

### 4.1.3 Bifurkační diagram

Tento nástroj slouží pro zobrazení a identifikaci změn chování dynamického systému při změně jeho konfigurace (změně jeho parametrů). Pro jeho konstrukci se využívá Poincarého mapa. Lze říci, že bifurkační diagram je geometricky uspořádaná množina (graf) Poincarého map pro různé (spojitě se měnící) parametry systému.

Bifurkační diagram lze konstruovat za různých podmínek:

- pro každou změnu parametrů startuje nový systém se stále stejnými počátečními podmínkami,
- pohybující se systém je podroben malé změně parametru, aniž by byl znovu spouštěn (tj. provedení změny parametrů „za chodu“),
- systém je pro každou změnu parametrů spuštěn mnohokrát s různými (zpravidla náhodně generovanými) počátečními podmínkami.

### Ustálené chování

Nejčastěji používaným je bifurkační diagram ustáleného chování. Zobrazení Poincarého mapy celé trajektorie by totiž bylo na úkor přehlednosti diagramu. V bifurkačním diagramu ustáleného chování tak můžeme být přímo svědky bifurkací limitních cyklů, kaskád bifurkací,

náhlých změn stavu či vzniku a rozvoje chaotického chování, viz obrázky 3.14, 3.15, 3.16 a 3.18 z kapitoly 3.

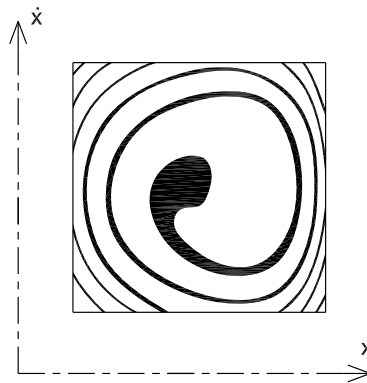
Požadavek ustálení systému pro konstrukci Poincarého mapy v sobě skrývá určité komplikace. Hlubší úvahou zjistíme, že vzhledem k existenci chaotického chování a nestabilní přechodové oblasti není snadné rozhodnout, zda-li již došlo k ustálení systému. Tento problém je obzvláště závažný u kmitání reálných konstrukcí, kde se nevyhneme těžko poznatelným vlivům na chování konstrukce.

Problém ustálení lze nejjednodušeji řešit nastavenou, dostatečně dlouhou dobou, po které se systém ustaluje. Slovním spojením „dostatečně dlouhá doba“ myslíme takový časový interval, jehož prodloužení neovlivní významně tvar bifurkačního diagramu. Jedná se tedy o ověření konvergence. Lepších výsledků (snížení časové náročnosti) můžeme dosáhnout užitím vhodného ukazatele ustálení. Těmito ukazateli mohou být například tzv. *agregované atributy* systému (viz kapitola 4.1.5).

#### 4.1.4 Bazény přitažlivosti

Bazény či oblasti přitažlivosti jsou pomůckou pro mapování rozložení možných limitních množin systému. Díky znalosti bazénů přitažlivosti můžeme stanovit také pravděpodobnost dosažení dané limitní množiny.

Konstrukce bazénů přitažlivosti daného systému spočívá v identifikaci limitních množin pro různé počáteční podmínky. Počáteční podmínky volíme obvykle pomocí síťového rastru, jímž pokryjeme sledovaný fázový prostor systému. Pro dané počáteční podmínky pak určíme do jaké limitní množiny se systém ustálí. Dle identifikované limitní množiny provedeme označení bodu, reprezentujícího počáteční podmínky ve fázovém prostoru, symbolem identifikované limitní množiny, viz obr. 4.4.



Obrázek 4.4: Bazény přitažlivosti slabě nelineárního systému se dvěma identifikovanými limitními množinami. Černá reprezentuje počáteční podmínky pro dosažení prvního limitního cyklu a bílá dosažení druhého limitního cyklu

Podobně jako u konstrukce bifurkačního diagramu, také při výpočtu bazénů přitažlivosti se nevyhneme potížím. Nejprve potřebujeme určit, zda-li se již systém (pro dané počáteční podmínky) ustálil. Pro ustálený systém je třeba identifikovat a označit limitní množinu. Identifikace je spojena s možností nalezení limitní množiny, kterou jsme dosud nepozorovali<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Neexistuje obecný algoritmus pro nalezení všech limitních množin.

### 4.1.5 Různé agregované atributy

Pod pojmem agregovaný atribut je myšleno např. reálné číslo, které vyjadřuje určitou vlastnost systému. Takové číslo je definováno dlouhodobým pohybem tohoto systému (tzn. lze mluvit o jeho agregování v čase).

Agregované atributy lze často využít v případě, že potřebujeme vyjádřit vlastnosti systému jedinou hodnotou, korespondující s mírou složitosti systému.

Agregovaným atributům schopným rozlišit druhy chaotického chování systému z kvalitativního hlediska se říká *deskriptory chaosu*. Naopak z kvantitativního hlediska popisují chaos tzv. *kvantifikátory chaosu*, viz [41].

### Fraktální dimenze

Pro popis a klasifikaci fraktálních množin byly definovány různé zobecněné dimenze vycházející z různých typů měr (např. *Hausdorfova*). Změříme-li neceločíselnou hodnotu zobecněné dimenze daného objektu, pak se jedná o fraktál. Ovšem existují i fraktály, které mají celočíselnou dimenzi, viz např. [9]. Tento zdánlivý paradox souvisí s definicí fraktálu jako soběpodobného útvaru, viz kapitola 2.3.5.

Jednou z nejjednodušších zobecněných dimenzí je tzv. *Kolmogorova dimenze* neboli *kapacitní dimenze*, označovaná  $d_c$  a definovaná vztahem:

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (4.4)$$

kde  $N$  je minimální počet útvarů (např. krychlí) velikosti  $\varepsilon$  pokrývajících měřený objekt. Například má-li fraktál na obr. 2.13 šířku a výšku rovnou jedné, pak lze beze zbytku pokrýt jedním čtvercem rozměru  $\varepsilon_0 = 1$ , třemi čtverci rozměru  $\varepsilon_1 = 1/2$ , devíti čtverci rozměru  $\varepsilon_2 = 1/4$ , atd. Platí tedy vztah:

$$N_i(\varepsilon_i = 1/2^i) = 3^i, \quad (4.5)$$

z čehož dosazením do (4.4) dostáváme:

$$d_c = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln N_i}{\ln(1/\varepsilon_i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^i}{\ln 2^i} = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \quad (4.6)$$

Z dalších často užívaných fraktálních dimenzí uveďme *informační dimenzi* a *korelační dimenzi*. Tyto dvě spolu s kapacitní dimenzí tvoří, tak jak jsou uvedeny, první tři členy posloupnosti dimenzí, tzv. *spektra dimenzí*, viz [41]. Spektra dimenzí slouží především k podrobnější fraktální analýze. Korelační dimenze má význam zejména pro určování fraktální dimenze limitních množin z naměřených časových řad, viz [41].

Poznamenejme, že fraktální dimenze jsou geometrické kvantifikátory chaosu.

### Ljapunovy exponenty

Je-li systém v nestabilním stavu lze ukázat, že se dvě vzájemně blízké trajektorie vzdalují rychleji než polynomiálně, viz [41]. Vzdálenost  $r$  dvou bodů na blízkých trajektoriích lze aproximovat vztahem:

$$r(t) = r_0 e^{\lambda t}, \quad (4.7)$$

kde  $\lambda$  je tzv. *lokální Ljapunovův exponent*.

Ve vícerozměrném fázovém prostoru je definováno tzv. *globální spektrum* Ljapunovových exponentů (každé stavové proměnné odpovídá jeden), pro které platí:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{r_i(t)}{r_i(0)}, \quad (4.8)$$

kde  $i$  je index stavové proměnné (jedné dimenze fázového prostoru). Známe-li toto spektrum, pak můžeme konstatovat, že jsou-li všechny exponenty nekladné, jedná o stabilní chování systému (limitní body, limitní cykly, kvaziperiodické chování) a je-li alespoň jeden exponent kladný, pak se systém chová chaoticky<sup>2</sup>.

Ljapunovovy exponenty jsou řazeny k časovým kvantifikátorům chaosu.

#### 4.1.6 Inverzní modelování

Může nastat situace, kdy nemáme k dispozici vhodný přímý aparát pro vytvoření modelu reálného dynamického systému. Takové případy se vyskytují zejména ve vědních oborech, jejichž předměty zájmu mají složitější podstatu, např. biologie, ekonomie či psychologie. Je typické, že systémy tohoto druhu mají silně nelineární chování. Zejména pro takové případy byly vytvořeny postupy, které umožňují např. určit, zda se systém chová chaoticky, či stanovit dimenzi jeho atraktoru, viz např. [34], [41].

## 4.2 Jiná zobrazení

Jako příklad jiných zobrazení můžeme zmínit samotné časové řady sledovaných veličin (tj. skalární složky diskretizované trajektorie) či jejich transformace do frekvenční domény (tzv. spektrální analýza). Ve frekvenční doméně můžeme vidět, které elementární složky jsou v dané časové řadě dominantní a například také kdy došlo k jejich nástupu.

Ze známých metod tohoto druhu uveďme známou *Fourierovu transformaci* a moderní *wavelet transformaci*, viz např. [60]. Jejich aplikace na silně nelineární problémy ovšem zpravidla není účinná, jelikož tyto metody nedokáží rozlišit šum od chaotického chování, viz např. [41].

---

<sup>2</sup>V případě dvou a více kladných Ljapunovových exponentů hovoříme o *hyperchaosu*.

# Kapitola 5

## Řešení pohybových rovnic

Dynamické systémy, které lze vytvořit pro modelování mechanických konstrukcí, mají jednu společnou vlastnost, důležitou pro výběr metod jejich řešení. Touto vlastností je disipace energie. V modelu je tento jev podchycen přidaným členem, způsobujícím tlumení systému. Dynamické systémy mající tento člen pak nazýváme *disipativní*<sup>1</sup>. Pro řešení disipativních dynamických systémů zpravidla s výhodou postačují základní *explicitní numerické metody* pro řešení počátečního problému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

### 5.1 Eulerova metoda

*Eulerova metoda* je nejjednodušší jednokrokovou<sup>2</sup> a jednobodovou<sup>3</sup> numerickou metodou pro řešení počátečního problému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, přičemž pro diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \quad (5.1)$$

má předpis (tzv. *diferenční vztah*):

$$x(t+h) = x(t) + h F(t, x(t)). \quad (5.2)$$

Aby tento postup mohl být proveden, je třeba znát počáteční podmínku (řešíme počáteční problém) například ve tvaru:

$$x(0) = x_0, \quad (5.3)$$

kde  $x_0$  je dané reálné číslo.

---

<sup>1</sup>Kromě disipativních systémů existují také systémy *konzervativní*, v nichž se celková energie zachovává. Konzervativní systémy jsou z hlediska *numerické stability* náročnější a vyžadují robustnější numerické metody.

<sup>2</sup>Numerická metoda se nazývá *k-kroková*, je-li pro výpočet nové hodnoty  $x(t+h)$  zapotřebí znát  $k$  předchozích stavů  $x$ . Například pro dvoukrokovou metodu je třeba znát stav  $x(t)$  a také předchozí stav  $x(t-h)$ .

<sup>3</sup>Numerická metoda se nazývá *l-bodová*, je-li pro výpočet nové hodnoty  $x(t+h)$  zapotřebí spočítat  $l$  hodnot funkce  $F(t, x(t))$ .



Eulerova metoda aproximuje průběh funkce  $x$  v bodě  $t$  přímkou se směrnici  $F(t, x(t))$ . Předpis (5.2) lze proto získat například ze vztahu pro numerickou první derivaci. Pro první derivaci funkce  $y = f(x)$  podle proměnné  $x$  lze přibližně psát:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (5.4)$$

kde  $h$  je malé číslo. Tento vztah je možno upravit:

$$f(x+h) \approx f(x) + h f'(x), \quad (5.5)$$

což je až na označení totožný výraz jako předpis Eulerovy metody (5.2). Chyba této metody je řádu  $\mathcal{O}(h^2)$ .

Dynamické systémy jsou zpravidla soustavami diferenciálních rovnic. Předpis Eulerovy metody pro řešení takových dynamických systémů lze přepsat:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h F_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

kde  $n$  je dimenze dynamického systému (počet jeho stavových proměnných).

## 5.2 Klasická Runge-Kuttova metoda

Podstatně výkonnější numerickou metodou pro řešení počátečního problému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu je *Klasická Runge-Kuttova metoda*, která je jednokroková a čtyřbodová. Metoda aproximuje průběh funkce  $x$  polynomem čtvrtého stupně. Chyba této metody je řádu  $\mathcal{O}(h^5)$ . S ohledem na (5.1) a (5.3) má předpis (vyžaduje znát hodnoty funkce  $F(t, x(t))$  ve čtyřech bodech):

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t, x(t)), \\ k_2 &= F(t + h/2, x(t) + k_1 h/2), \\ k_3 &= F(t + h/2, x(t) + k_2 h/2), \\ k_4 &= F(t + h, x(t) + k_3 h), \\ x(t+h) &= x(t) + h/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Její zobecnění na řešení soustav rovnic pak:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= F_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ k_{2i} &= F_i(t + h/2, x_1(t) + k_{11} h/2, x_2(t) + k_{12} h/2, \dots, x_n(t) + k_{1n} h/2), \\ k_{3i} &= F_i(t + h/2, x_1(t) + k_{21} h/2, x_2(t) + k_{22} h/2, \dots, x_n(t) + k_{2n} h/2), \\ k_{4i} &= F_i(t + h, x_1(t) + k_{31} h, x_2(t) + k_{32} h, \dots, x_n(t) + k_{3n} h), \\ x_i(t+h) &= x_i(t) + h/6 (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}), i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.8)$$

kde  $n$  je počet rovnic a zároveň stavových proměnných  $x_i$  dynamického systému.

### 5.3 Upravená Eulerova metoda

Výrazně lepších výsledků (zlepšení stability) při užití Eulerovy metody lze dosáhnout jednoduchou úpravou mající původ ve vlastnosti zkoumaného dynamického systému. Dynamické systémy popisující pohyb mechanických konstrukcí vznikají totiž z diferenciálních rovnic druhého řádu, přičemž se upravují jednoduchou substitucí na diferenciální rovnice prvního řádu. Mějme například diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (5.9)$$

kterou lze substitucí

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (5.10)$$

upravit na soustavu (dynamický systém):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x, \\ \frac{dx}{dt} &= v. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Takto vytvořený dynamický systém lze řešit popsanou Eulerovou metodou předpisem (5.2), přičemž obdržíme diferenční vztahy:

$$\begin{aligned} v(t+h) &= v(t) - h \left( \frac{c}{m}v(t) + \frac{k}{m}x(t) \right), \\ x(t+h) &= x(t) + h v(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Tento předpis můžeme snadno upravit na:

$$\begin{aligned} v(t+h) &= v(t) - h \left( \frac{c}{m}v(t) + \frac{k}{m}x(t) \right), \\ x(t+h) &= x(t) + h v(t+h), \end{aligned} \quad (5.13)$$

za předpokladu, že nejprve vypočteme hodnotu stavové proměnné  $v$  (rychlost posunutí  $x$ ) v čase  $t+h$ . Slovně můžeme tuto úpravu popsat jako užití nově vypočtené rychlosti posunutí  $v$  pro výpočet nového posunutí  $x$  (tuto úpravu lze snadno zobecnit pro řešení rozsáhlejších soustav diferenciálních rovnic)<sup>4</sup>.

Podobných výsledků (stejně stability metody) dosáhneme opačnou úpravou:

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + h v(t), \\ v(t+h) &= v(t) - h \left( \frac{c}{m}v(t) + \frac{k}{m}x(t+h) \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

<sup>4</sup>Tato úprava je podobná úpravě užitě v *Gauss-Seidelově iterační metodě* pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic vycházející z *Jakobiho iterační metody*. Gauss-Seidelova metoda (též nazývaná zrychlená Jakobiho metoda) zahrnuje do výpočtu nové aproximace  $i$ -tého kořene soustavy všechny již vypočtené aproximace kořenů s indexem  $0, \dots, i-1$ . Tím je dosaženo urychlení konvergence iterační metody.

obdobně za předpokladu, že nejprve vypočteme hodnotu stavové proměnné  $x$  (posunutí) v čase  $t + h$ . Slovně můžeme opět tuto úpravu popsat jako užití nově vypočteného posunutí  $x$  pro výpočet nové rychlosti posunutí  $v$ .

Srovnání stability Eulerovy metody a této upravené Eulerovy metody je uvedeno v příloze A.

## 5.4 Pokročilejší metody

### 5.4.1 Implicitní metody

Vyšší stabilitu výpočtu mohou v některých případech (např. konzervativní systémy) poskytnout *implicitní metody*, které se ovšem oproti explicitním metodám vyznačují větší výpočetní složitostí.

### 5.4.2 Adamsovy metody

Popsané jednokrokové metody užívají pro výpočet nového stavu pouze stav předcházející. Vícekrokové metody, souhrnně nazývané *Adamsovy metody*, naproti tomu zahrnují do výpočtu nového stavu více předcházejících stavů, což může také zvýšit efektivitu výpočtu. O vícekových metodách lze získat další informace např. z [12], [40].

### 5.4.3 Adaptivní metody

Za určitých okolností je výhodné měnit diskretizační krok  $h$  numerické metody pro zvýšení časové efektivity řešení. Výpočet probíhá tak, že se stav v daném čase vypočte užitím různých kroků a zjištěný rozdíl se porovná s tolerancí pro snížení popř. zvýšení diskretizačního kroku.

## Kapitola 6

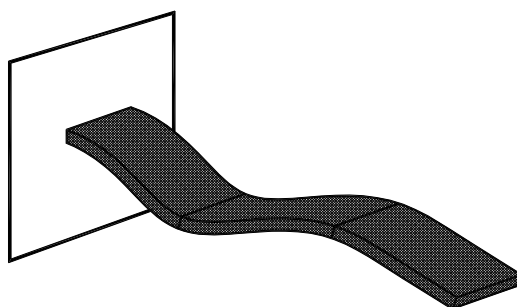
# Modelování konstrukcí

Nejužívanější teorií pro simulace reálných konstrukcí je v současnosti *mechanika kontinua*<sup>1</sup>, viz [44]. Platí to navzdory tomu, že kontinuum neodpovídá známé struktuře materiálů. Tento fakt souvisí se složitostí problému a také s relativně malými nároky kladenými na výstižnost modelů. Řešení modelů konstrukcí odpovídajících představě kontinua ovšem i tak často vyžaduje přijmout další zjednodušení.

Následující kapitoly se věnují dvěma finitním metodám deformací (tj. hledají se neznámé posuvy), které mají hlavní význam pro tuto práci.

### 6.1 Metoda konečných prvků

Nahrazení analýzy kontinua modelem popsaným pouze *diskrétními hodnotami* je názorný zejména v *metodě konečných prvků*<sup>2</sup>, která je v současnosti ve své *deformační variantě* nejpoužívanější metodou pro řešení úloh napjatosti a přetvoření konstrukcí. Tato metoda nahrazuje myšlené kontinuum konečným počtem podoblastí (konečných prvků, viz obr. 6.1), na kterých jsou zvoleny aproximační funkce posunutí bodů kontinua (zpravidla polynomy).



Obrázek 6.1: Znázornění přetvořeného modelu konzolového nosníku v metodě konečných prvků (šedá barva znázorňuje spojitě rozložené deformační energie v modelu, srov. s obr. 6.2)

<sup>1</sup>Existují i jiné metody výpočtu konstrukcí, které v sobě mohou skrývat potenciál využitelný v budoucnu. Uveďme zejména konečné automaty, které nacházejí uplatnění v úlohách mechaniky.

<sup>2</sup>V soustavě finitních metod mechaniky [31] je zařazena pod metody síťové diskretizace.

Tyto funkce jsou určeny konečným počtem posuvů vybraných bodů – *uzlů* (obecněji *center*<sup>3</sup>) prvku. Řešení konstrukce je potom hledání aproximace těchto posuvů pro kritérium *energetického minima* s užitím *variačního principu*.

Na obr. 6.1 je vidět schéma rozdělení konzolového nosníku na tři konečné prvky. Každý prvek má nejméně dvě centra (uzly prvku) a deformace prvku jsou spojitě rozloženy po jeho objemu (deformační energie se akumuluje v celém prvku).

### 6.1.1 Pohybové rovnice konzervativního modelu

Pohybové rovnice konzervativního dynamického systému bez vnějšího zatížení, vzniklého diskretizací kontinua metodou konečných prvků, lze psát v maticovém tvaru:

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\mathbf{K} \mathbf{x},$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{v},$$
(6.1)

kde  $\mathbf{x}$  je vektor posunutí center (uzlů),  $\mathbf{v}$  je vektor rychlostí posunutí center,  $\mathbf{M}$  je nediagonální matice hmotnosti konstrukce a  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti konstrukce.

Z hlediska formulace pohybových rovnic modelu, vytvořeného metodou konečných prvků, jako dynamický systém je nediagonální matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  nevýhodou. Pohybové rovnice totiž nejsou vyjádřeny v kanonické formě. Příčina vzniku nediagonální matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  je v situování center mimo těžiště prvku, viz [31]. Existují implementace metody konečných prvků, kde se matice hmotnosti diagonalizuje, viz [29].

### 6.1.2 Vlastnosti metody konečných prvků

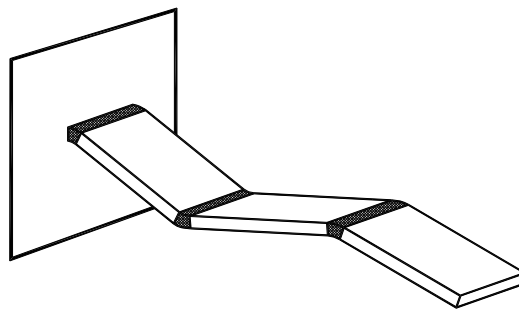
Metoda konečných prvků má z hlediska uvedeného přístupu následující výhody a nevýhody:

- +
  - přímější návaznost na realitu,
  - rozšířenost metody, zkušeností a jejích implementací,
  - obecný tvar,
- - netransparentnost výpočtu,
  - nesnadná implementace,
  - komplikované řešení nelineárních problémů,
  - komplexní matematický aparát,
  - řešení soustav algebraických rovnic,
  - mnoho úrovní aproximací.

<sup>3</sup>Užitá terminologie je v souladu se studií [31], kde lze také nalézt podrobnější rozbor problematiky.

## 6.2 Metoda tuhých dílců

*Metoda tuhých dílců*, nebo také *metoda simplexních prvků* [45], popř. dle [31] *exkumulační* varianta *metody tuhých fyzických konečných prvků*<sup>4</sup>, užívá speciálního způsobu diskretizace kontinua. Myšlené kontinuum je rozděleno na tuhé segmenty spojené vzájemně vhodnými pružnými elementy, tzv. *kumulátory přetvoření*<sup>5</sup>, které zajišťují možnost deformací modelu. Tuto metodu lze chápat jako protějšek metody konečných prvků ve smyslu procesu diskretizace, viz [31]. Značnou výhodou je bezproblémové zahrnutí *geometrické nelinearity* a v případě *dynamické formulace* dostáváme přímo soustavu pohybových rovnic v kano-nickém tvaru (pro výpočet postačuje velmi jednoduchý matematický aparát).



Obrázek 6.2: Znázornění přetvořeného modelu konzolového nosníku v metodě tuhých dílců (šedě jsou zobrazeny oblasti akumulace deformační energie)

Na obr. 6.2 je vidět schéma rozdělení přetvořeného konzolového nosníku na tři tuhé dílce. Každý dílec má jedno centrum (těžiště prvku) a deformace jsou soustředěny na jeho okraje (deformační energie se akumuluje na kontaktech segmentu – kontaktních kumulátorech energie).

V následující kapitole je ukázáno odvození konzervativních pohybových rovnic modelu metody tuhých dílců pro řešení štíhlých rovinných prutových konstrukcí v oblastech velkých posunutí. Posléze bude v kapitole 7 odvozen speciální model konzoly, který lze chápat jako speciální případ této metody. Vyvinutý speciální model slouží pro simulace kmitání v oblastech velkých posunutí a experimentální výzkum v rámci této práce.

### 6.2.1 Odvození pohybových rovnic konzervativního modelu

V této kapitole je uvedeno odvození pohybových rovnic obecného konzervativního modelu složeného z tuhých dílců. Cílem odvození je ukázat jednoduchost myšlenky nahrazení kontinua tuhými dílci. Je patrné, jak malé množství předpokladů postačuje k vytvoření modelu, jímž jsme schopni řešit složité dynamické úlohy kmitání při velkých posunutí.

Konzervativní pohybové rovnice budeme hledat dle zásad klasické mechaniky, užitím Lagrangeovy funkce (jak bylo popsáno v kapitole 2.2).

<sup>4</sup>V soustavě finitních metod mechaniky [31] je zařazena pod metody fyzické diskretizace.

<sup>5</sup>Užitá terminologie je v souladu se studií [31], kde lze také nalézt podrobnější rozbor problematiky.

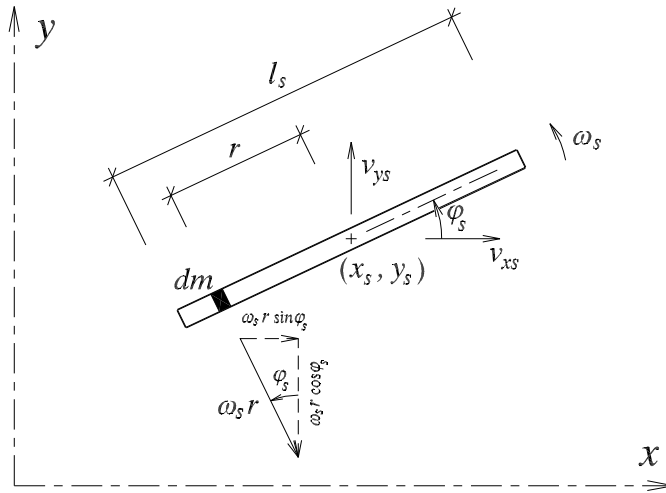
### Kinetická energie modelu

Na tuhé segmenty, z nichž je složen model metody tuhých dílců lze nahlížet jako na oddělená tuhá tělesa, která na sebe vzájemně působí prostřednictvím kontaktních kumulátorů energie – pružin. Kinetickou energii obecného modelu metody tuhých dílců  $E_k$  lze zapsat jako součet kinetických energií dílců:

$$E_k = \sum_{s=1}^{n_d} E_{ks}, \quad (6.2)$$

kde  $s$  je index tuhého dílce,  $E_{ks}$  jeho kinetická energie a  $n_d$  je celkový počet tuhých dílců modelu.

Na obrázku 6.3 je vidět vybraný  $s$ -tý tuhý dílec délky  $l_s$  a hmotnosti  $m_s$  umístěný v rovinném souřadném systému včetně označení jeho zobecněných souřadnic.



Obrázek 6.3: Schema tuhého dílce včetně označení

Stav dílce je v dynamickém systému jednoznačně určen šesticí zobecněných souřadnic (uvažujeme rovinnou prutovou konstrukci): dvěma souřadnicemi jeho těžiště  $x_s$  a  $y_s$ , úhlem pootočení  $\varphi_s$  (se středem otáčení v těžišti dílce) a jejich rychlostmi  $v_{xs}$ ,  $v_{ys}$ ,  $\omega_s$ , pro které platí:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_s &= v_{xs}, \\ \frac{d}{dt} y_s &= v_{ys}, \\ \frac{d}{dt} \varphi_s &= \omega_s. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Vytněme na dílci diferenciální element o hmotnosti  $dm$ , viz obr. 6.3. Pro dílčí kinetickou energii  $dE_{ks}$  diferenciálního elementu lze psát:

$$dE_{ks} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho_s dr v^2, \quad (6.4)$$

kde  $\varrho_s$  je hustota dílce a  $v$  je rychlost diferenciálního elementu, pro kterou platí:

$$\vec{v} = v_{xs} \vec{e}_x + v_{ys} \vec{e}_y + \vec{\omega}_s \times \vec{r}, \quad (6.5)$$

kde  $r$  je vzdálenost diferenciálního elementu od těžiště dílce. Odtud dostáváme pro kinetickou energii elementu vztah:

$$dE_{ks} = \frac{1}{2} \varrho_s \left( (v_{xs} + \omega_s r \sin \varphi_s)^2 + (v_{ys} - \omega_s r \cos \varphi_s)^2 \right) dr. \quad (6.6)$$

Kinetickou energii celého dílce získáme integrací všech dílčích kinetických energií diferenciálních elementů po délce dílce  $l_s$ :

$$E_{ks} = \int_{-l_s/2}^{l_s/2} dE_{ks}. \quad (6.7)$$

Předpokládejme nyní, že má dílec konstantní fyzikálně-mechanické vlastnosti po své délce. Vztah (6.7) tak můžeme s užitím vztahů (6.4) a (6.6) upravit na:

$$E_{ks} = \frac{1}{2} \varrho_s \int_{-l_s/2}^{l_s/2} \left( (v_{xs} + \omega_s r \sin \varphi_s)^2 + (v_{ys} - \omega_s r \cos \varphi_s)^2 \right) dr, \quad (6.8)$$

z čehož integrací získáme:

$$E_{ks} = \frac{1}{2} \varrho_s l_s \left( v_{xs}^2 + \frac{1}{12} l_s^2 \omega_s^2 + v_{ys}^2 \right) = \frac{1}{2} m_s \left( v_{xs}^2 + \frac{1}{12} l_s^2 \omega_s^2 + v_{ys}^2 \right). \quad (6.9)$$

Pro celý model pak můžeme psát:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_d} m_s \left( v_{xs}^2 + \frac{1}{12} l_s^2 \omega_s^2 + v_{ys}^2 \right). \quad (6.10)$$

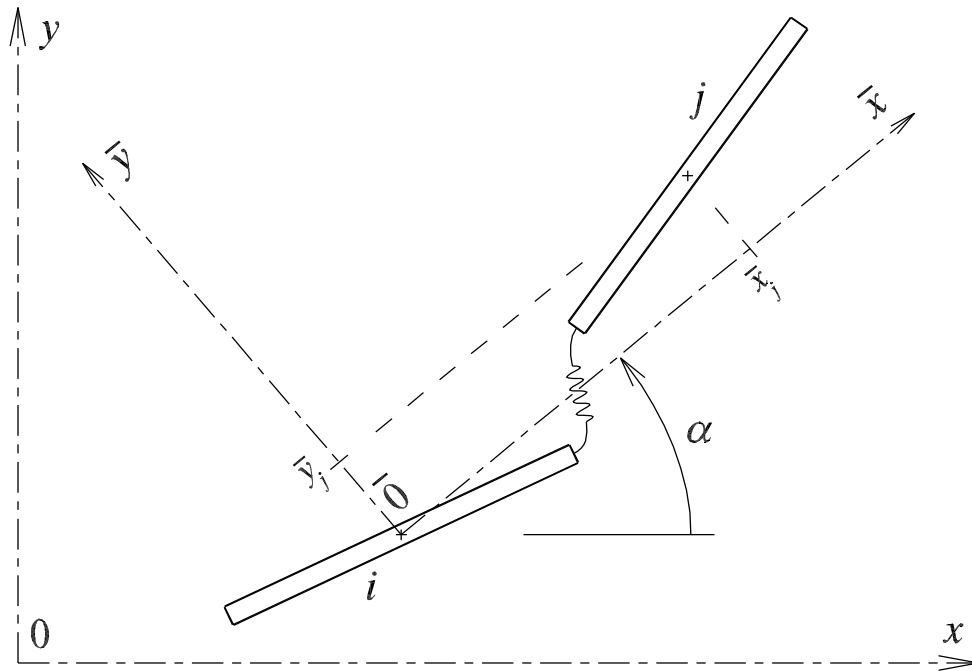
### Interakce dílců a formulace potenciální energie modelu

Obtížnější část odvození je sestavení potenciální energie modelu. Z obecného popisu modelu metody tuhých dílců víme, že se deformační energie akumuluje v kontaktních elementech. Tyto kontaktní elementy zajišťují přenos sil mezi dílci. Jelikož uvažujeme konzervativní systém bez zatížení, je potenciální energie modelu  $E_p$  určena právě stavem těchto interakčních kumulátorů. Prvním problémem je tedy vhodná definice kontaktních kumulátorů, která musí být funkční i při velkých posunutí.

Mějme dva dílce  $i$  a  $j$ , které jsou vzájemně spojeny kontaktním kumulátorem, viz obr. 6.4. Zavedme lokální souřadný systém (v obrázku označen pruhem) s počátkem v těžišti  $i$ -tého dílce pootočený tak, že s globálním souřadným systémem svírá úhel  $\alpha$ , pro který nechť platí (aritmetický průměr pootočení dílců):

$$\alpha = \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}. \quad (6.11)$$





Obrázek 6.4: Schéma interagujících dílců včetně transformace souřadného systému pro stanovení stavu interakčního kumulátoru deformační energie

Pro transformaci souřadnic dílců mezi těmito dvěma souřadnými systémy platí:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - x_i) \cos \alpha + (y - y_i) \sin \alpha, \\ \bar{y} &= -(x - x_i) \sin \alpha + (y - y_i) \cos \alpha, \\ \bar{\varphi} &= \varphi - \alpha.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Užitím této transformace dostáváme lokální souřadnice  $i$ -tého dílce:

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= 0, \\ \bar{y}_i &= 0, \\ \bar{\varphi}_i &= \varphi_i - \alpha,\end{aligned}\tag{6.13}$$

a hlavně lokální souřadnice  $j$ -tého dílce, které nám poslouží pro stanovení interakčních vztahů mezi dílci  $i$  a  $j$ :

$$\begin{aligned}\bar{x}_j &= (x_j - x_i) \cos \alpha + (y_j - y_i) \sin \alpha, \\ \bar{y}_j &= -(x_j - x_i) \sin \alpha + (y_j - y_i) \cos \alpha, \\ \bar{\varphi}_j &= \varphi_j - \alpha.\end{aligned}\tag{6.14}$$

Definujme trojici deformací kontaktního kumulátoru:

$$\begin{aligned} d_N &= \bar{x}_i - \frac{1}{2}(l_i \cos \bar{\varphi}_i + l_j \cos \bar{\varphi}_j), \\ d_T &= \bar{y}_i, \\ d_M &= \varphi_j - \varphi_i, \end{aligned} \tag{6.15}$$

kde  $d_N$  nechť je normálové protažení kontaktního kumulátoru,  $d_T$  jeho smyková deformace a  $d_M$  jeho natočení. Tuto trojici vztahů lze užitím lokálních souřadnic (6.14) a vztahu pro transformační úhel (6.11) rozepsat:

$$\begin{aligned} d_N &= (x_j - x_i) \cos \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2} + (y_j - y_i) \sin \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2} - \frac{l_i + l_j}{2} \cos \frac{\varphi_j - \varphi_i}{2}, \\ d_T &= -(x_j - x_i) \sin \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2} + (y_j - y_i) \cos \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}, \\ d_M &= \varphi_j - \varphi_i. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Předpokládejme, že se materiál prutu chová lineárně pružně pro přetvoření, kterých je reálně dosahováno. Za tohoto předpokladu můžeme definovat interakční síly mezi dílci ve tvaru:

$$\begin{aligned} N &= k_N d_N, \\ T &= k_T d_T, \\ M &= k_M d_M, \end{aligned} \tag{6.17}$$

kde  $k_N$  je normálová tuhost kontaktního kumulátoru a  $N$  odpovídající normálová síla, dále  $k_T$  je smyková tuhost a  $T$  odpovídající posouvající síla a obdobně  $k_M$  je ohybová tuhost a  $M$  odpovídající ohybový moment.

Jelikož máme definované interakce reprezentující kontaktní kumulátor, můžeme přejít ke stanovení potenciální energie modelu. Platí:

$$E_p = \sum_{s=1}^{n_k} E_{ps}, \tag{6.18}$$

kde  $n_k$  je celkový počet kontaktních kumulátorů v modelu,  $s$  je index kontaktního kumulátoru,  $E_{ps}$  jeho potenciální energie, pro kterou platí (máme lineárně pružný materiál):

$$E_{ps} = E_{ps,N} + E_{ps,T} + E_{ps,M} = \frac{1}{2}(N d_N + T d_T + M d_M), \tag{6.19}$$

což můžeme užitím vztahů (6.17) upravit dále:

$$E_{ps} = \frac{1}{2}(k_N d_N^2 + k_T d_T^2 + k_M d_M^2). \tag{6.20}$$

Po dosazení do vztahu (6.18) dostáváme závěrečný vztah pro celkovou potenciální energii modelu:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_k} (k_N d_N^2 + k_T d_T^2 + k_M d_M^2). \tag{6.21}$$

### Pohybové rovnice

Víme, že je pro odvození pohybových rovnic vhodné sestavit Lagrangián  $L$ , který obdržíme jako rozdíl kinetické energie  $E_k$  a potenciální energie  $E_p$  řešeného systému – vztah (2.1). Užitím Lagrangiánu získáme pohybové rovnice z předpisu (2.2), který upravíme:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_{xs}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_s}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_{ys}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_d, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_s} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \varphi_s}.\end{aligned}\tag{6.22}$$

Užitím odvozených vztahů (6.10) a (6.21) můžeme tento zápis zjednodušit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial v_{xs}} \right) &= -\frac{\partial E_p}{\partial x_s}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial v_{ys}} \right) &= -\frac{\partial E_p}{\partial y_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_d, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \omega_s} \right) &= -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_s}.\end{aligned}\tag{6.23}$$

Díky jednoduchosti vztahu (6.10) pro kinetickou energii modelu  $E_k$  můžeme po derivacích přímo dosadit:

$$\begin{aligned}m_s \frac{dv_{xs}}{dt} &= -\frac{\partial E_p}{\partial x_s}, \\ m_s \frac{dv_{ys}}{dt} &= -\frac{\partial E_p}{\partial y_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_d, \\ \frac{1}{12} m_s l_s^2 \frac{d\omega_s}{dt} &= -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_s},\end{aligned}\tag{6.24}$$

z čehož je patrné, že přímo dostáváme soustavu diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru, jak vyžaduje definice dynamického systému (2.4).

Pravé strany v těchto vztazích již nebudou tak snadno vyjádřitelné, jelikož potenciální energie modelu  $E_p$  má, jak je patrné ze vztahu (6.21), komplikovanou podobu. Pro zpřehlednění zápisu provedeme rozdělení potenciální energie do složek, odpovídajících jednotlivým kontaktním kumulátorům, analogicky se vztahem (6.19):

$$E_p = E_{p,N} + E_{p,T} + E_{p,M}.\tag{6.25}$$

Pravou stranu první rovnice ve vztahu (6.24) tak můžeme rozepsat:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_s} = \frac{\partial E_{p,N}}{\partial x_s} + \frac{\partial E_{p,T}}{\partial x_s} + \frac{\partial E_{p,M}}{\partial x_s}.\tag{6.26}$$

Pro první složku, příslušnou kumulátorům normálové deformace, lze odvodit, že platí:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{p,N}}{\partial x_s} = & k_N \left( (x_{s+1} - x_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{l_s + l_{s+1}}{2} \cos \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{2} \right) \cdot \left( -\cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) + \\
 & + k_N \left( (x_s - x_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{l_{s-1} + l_s}{2} \cos \frac{\varphi_s - \varphi_{s-1}}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2}.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

kde  $s$  je index obecného tuhého dílce resp. index trojice pohybových rovnic (6.24). Pro druhou složku, příslušnou kumulátorům smykové deformace platí:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{p,T}}{\partial x_s} = & k_T \left( -(x_{s+1} - x_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) \cdot \\
 & \cdot \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + \\
 & + k_T \left( -(x_s - x_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} \right) \cdot \\
 & \cdot \left( -\sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

Pro třetí složku, příslušnou kumulátorům ohybové deformace, jednoduše platí:

$$\frac{\partial E_{p,M}}{\partial x_s} = 0. \tag{6.29}$$

Pravou stranu druhé rovnice ve vztahu (6.24) lze obdobně rozepsat na:

$$\frac{\partial E_p}{\partial y_s} = \frac{\partial E_{p,N}}{\partial y_s} + \frac{\partial E_{p,T}}{\partial y_s} + \frac{\partial E_{p,M}}{\partial y_s}, \tag{6.30}$$

přičemž pro první, normálovou složku platí:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{p,N}}{\partial y_s} = & k_N \left( (x_{s+1} - x_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{l_s + l_{s+1}}{2} \cos \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{2} \right) \cdot \left( -\sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) + \\
 & + k_N \left( (x_s - x_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{l_{s-1} + l_s}{2} \cos \frac{\varphi_s - \varphi_{s-1}}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2}.
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Pro druhou, smykovou složku platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{p,T}}{\partial y_s} &= k_T \left( -(x_{s+1} - x_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( -\cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) + \\ &+ k_T \left( -(x_s - x_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Pro třetí, ohybovou složku, obdobně jako u předchozí ohybové složky jednoduše platí:

$$\frac{\partial E_{p,M}}{\partial y_s} = 0. \quad (6.33)$$

Nejbohatší, pravou stranu třetí rovnice ve vztahu (6.24), můžeme rozvést:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_s} = \frac{\partial E_{p,N}}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial E_{p,T}}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial E_{p,M}}{\partial \varphi_s}, \quad (6.34)$$

přičemž pro první, normálovou složku lze odvodit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{p,N}}{\partial \varphi_s} &= \frac{1}{2} k_N \left( (x_{s+1} - x_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_s + l_{s+1}}{2} \cos \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( -(x_{s+1} - x_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_s + l_{s+1}}{2} \sin \frac{\varphi_{s+1} - \varphi_s}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} k_N \left( (x_s - x_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l_{s-1} + l_s}{2} \cos \frac{\varphi_s - \varphi_{s-1}}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( -(x_s - x_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l_{s-1} + l_s}{2} \sin \frac{\varphi_s - \varphi_{s-1}}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Pro druhou, smykovou složku platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{p,T}}{\partial \varphi_s} &= \frac{1}{2} k_T \left( -(x_{s+1} - x_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} + (y_{s+1} - y_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( -(x_{s+1} - x_s) \cos \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} - (y_{s+1} - y_s) \sin \frac{\varphi_s + \varphi_{s+1}}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} k_T \left( -(x_s - x_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} + (y_s - y_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( -(x_s - x_{s-1}) \cos \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} - (y_s - y_{s-1}) \sin \frac{\varphi_{s-1} + \varphi_s}{2} \right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Poslední, ohybová složka je dána vztahem (poprvé nenulovým):

$$\frac{\partial E_{p,M}}{\partial \varphi_s} = -k_M(\varphi_{s+1} - \varphi_s) + k_M(\varphi_s - \varphi_{s-1}). \quad (6.37)$$

### Maticový zápis pohybových rovnic

Konzervativní dynamický systém vzniklý aplikací metody tuhých dílců je dle výše uvedeného odvození soustavou diferenciálních rovnic, jež lze zapsat v kanonickém maticovém tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{v} &= -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{q}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{x} &= \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

kde  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  jsou vektory zobecněných souřadnic tuhých dílců,  $\mathbf{M}$  je diagonální matice hmotnosti tuhých dílců a  $\mathbf{q}$  je vektor interakčních sil.

#### 6.2.2 Vlastnosti metody tuhých dílců

Metoda tuhých dílců má z hlediska vytvoření modelu konstrukce pro tuto práci následující výhody a nevýhody:

- + transparentnost výpočtu,  
snadná implementace,  
bezproblémové plně nelineární řešení,  
neřeší se soustava algebraických rovnic,  
postačuje jednoduchý matematický aparát,
- méně přímá návaznost na realitu,  
nerozšířenost metody.

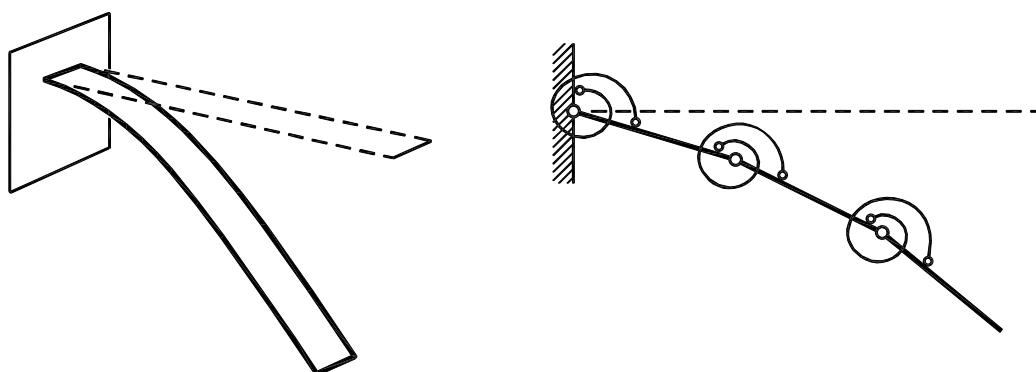
## Kapitola 7

# Speciální model konzoly

Pro simulaci ohybového kmitání štíhlého konzolového nosníku byl vytvořen model jako zvláštní případ aplikace metody tuhých dílců viz kapitola 6.2. Důvodem užití tohoto modelu je jeho jednoduchost a zejména nenáročnost na dobu výpočtu.

### 7.1 Úvod

Simulace jednoduchých nelineárních dynamických systémů, jako je například štíhlý konzolový nosník v oblasti velkých posunutí (viz obr. 7.1), mohou mít obecně velkou časovou náročnost. Minimální výpočetní čas je totiž přímo úměrný nejvyšší frekvenci, kterou bude model či jeho prvek kmitat. V případě modelu štíhlého nosníku z oceli jsou nejvyšší frekvence dosahovány při normálovém kmitání (kmitání pružných prvků nahrazujících normálovou tuhost). Normálové kmitání má nicméně malý vliv na globální chování nosníku kmitajícího převážně příčně. Proto se nabízí možnost vytvořit model normálově tuhý a omezit tak vznik vyšších frekvencí.



Obrázek 7.1: Konzolový nosník a jeho model

Konzolový nosník konstantního průřezu o hmotnosti  $m_c$ , délky  $l_c$  a ohybové tuhosti  $EI$ , nahradíme zvoleným počtem stejně dlouhých tuhých dílců vzájemně spojených klouby s lineárními rotačními pružinami (předpokládáme lineárně pružný materiál), viz obr. 7.1.

Nechť pružiny působí na tuhé dílce momentem  $M$ , pro který platí:

$$M(\varphi) = k\varphi, \quad k = \frac{EI}{l}, \quad l = \frac{l_c}{n}, \quad (7.1)$$

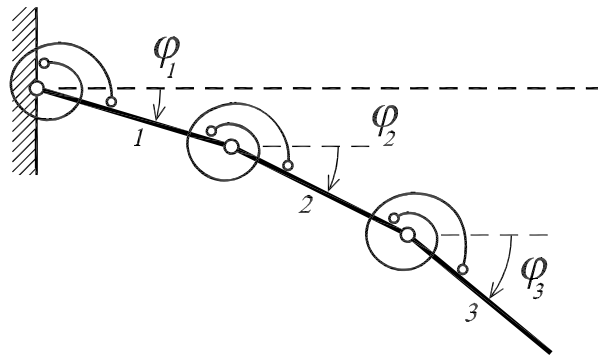
kde  $\varphi$  je vzájemné pootočení tuhých dílců resp. dvojnásobek pootočení dílce u vetknutí (lze si představit, že vetknutí je uplatnění vodorovné osy symetrie na volném nosníku délky  $2l_c$ ),  $k$  je tuhost rotační pružiny,  $l$  je délka tuhého dílce a  $n$  je počet tuhých dílců. Doplňme, že hmotnost jednoho tuhého dílce  $m$  je rovna  $m_c/n$ .

## 7.2 Energie

Odvození konzervativních pohybových rovnic provedeme dle zásad klasické mechaniky, užitím Lagrangeovy funkce (jak bylo popsáno v kapitole 2.2 a také užito v odvození pohybových rovnic modelu metody tuhých dílců v kapitole 6.2.1).

### 7.2.1 Kinetická energie

Mějme model konzolového nosníku složený ze tří dílců (získaný vztah lze potom snadno zobecnit), jak je znázorněno na obr. 7.2. Dílce jsou stejně dlouhé a pružiny mají stejnou tuhost, viz vztah (7.1). Pro takto vytvořený model sestavme pohybové rovnice.



Obrázek 7.2: Model nosníku

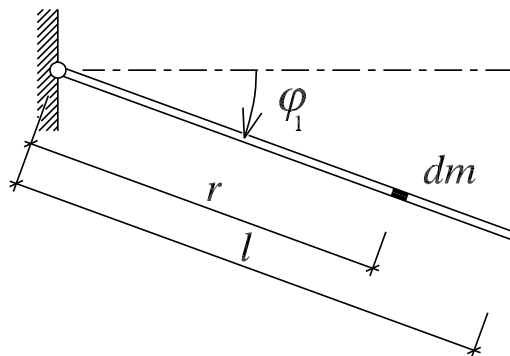
Pro získání pohybových rovnic je třeba sestavit Lagrangián  $L$ , který (jak již bylo uvedeno) obdržíme jako rozdíl kinetické energie  $E_k$  a potenciální energie  $E_p$  vyšetřovaného systému. Platí tedy:

$$L = E_k - E_p. \quad (7.2)$$

V tomto případě je poměrně obtížné sestavit výraz pro kinetickou energii  $E_k$ . Začneme s prvním elementem – formulujme nejprve výraz pro dílčí kinetickou energii  $E_{k1}$ . Diferenciální element o hmotnosti  $dm$  vytnutý na prvním dílci (viz obr. 7.3) má kinetickou energii

$$dE_{k1} = \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dr (\omega_1 r)^2, \quad (7.3)$$





Obrázek 7.3: První dílec

kde  $dm$  je hmotnost diferenciálního elementu,  $v_1$  je rychlost elementu,  $\varrho$  je hustota elementu,  $dr$  je délka elementu a  $\omega_1$  je úhlová rychlost prvního dílce, pro kterou obecně platí:

$$\omega_s = \frac{d\varphi_s}{dt}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (7.4)$$

kde  $\varphi_s$  je pootočení  $s$ -tého tuhého dílce. Kinetická energie prvního dílce je potom:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho (\omega_1 r)^2 dr = \frac{1}{6} ml^2 \omega_1^2. \quad (7.5)$$

Pro druhý dílec je situace složitější. Pohyb diferenciálního elementu na druhém dílci lze psát jako součet dvou nezávislých pohybů: pohybu translačního o translační rychlosti rovné obvodové rychlosti koncového bodu prvního dílce a pohybu rotačního o úhlové rychlosti  $\omega_2$ . Lze tak obdržet vztah:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{2t} + \vec{v}_{2o} = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \quad (7.6)$$

kde  $\vec{v}_{2t}$  je translační rychlost druhého dílce a  $\vec{v}_{2o}$  je relativní obvodová rychlost diferenciálního elementu vytnutého na druhém dílci. Pro kinetickou energii druhého dílce pak platí:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho |v_2|^2 dr = \frac{1}{6} ml^2 (3\omega_1^2 + \omega_2^2 + 3\omega_1 \omega_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)). \quad (7.7)$$

Ze vztahu (7.7) je patrné, že přidáním druhého dílce se původní výraz (7.5) značně zkomplikoval. Komplikací je součin  $\omega_1 \omega_2$  který, jak uvidíme v pohybových rovnicích, způsobí nárůst složitosti výpočtu.

Obdobně jako pro druhý dílec lze pro kinetickou energii třetího dílce ze součtu vektorů dílčích rychlostí odvodit vztah:

$$E_{k3} = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho |v_3|^2 dr = \frac{1}{6} ml^2 [3\omega_1^2 + 3\omega_2^2 + \omega_3^2 + 6\omega_1 \omega_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 3\omega_3 (\omega_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \omega_2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2))], \quad (7.8)$$

což lze zobecnit pro  $s$ -tý tuhý dílec:

$$E_{ks} = \frac{1}{6}ml^2 \left[ \omega_s^2 + 3 \sum_{j=1}^{s-1} \omega_j^2 + 6 \sum_{i=1}^{s-2} \omega_i \left( \sum_{j=i+1}^{s-1} \omega_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) \right) + \right. \\ \left. + 3\omega_s \sum_{j=1}^{s-1} \omega_j \cos(\varphi_s - \varphi_j) \right]. \quad (7.9)$$

Lze odvodit, že pro celkovou kinetickou energii modelu obecně platí:

$$E_k = \sum_{s=1}^n E_{ks} = \frac{1}{6}ml^2 \left[ \sum_{i=1}^n (3(n-i) + 1)\omega_i^2 + \right. \\ \left. + 3 \sum_{i=1}^n (2(n-i) + 1)\omega_i \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right]. \quad (7.10)$$

### 7.2.2 Potenciální energie

Potenciální energii  $E_p$  obdržíme snadněji. Jedinými akumulátory potenciální energie jsou rotační pružiny. Označme pružinu indexem  $s, s+1$  pokud připojuje  $s$ -tý tuhý dílec k  $s+1$  dílci. Potom pro napjatost pružiny platí (sledujeme obr. 7.2):

$$M_{0,1} = k 2\varphi_1, \quad (7.11)$$

$$M_{s,s+1} = k(\varphi_{s+1} - \varphi_s), \quad s = 1, 2, \dots, n-1,$$

tedy pro potenciální energii  $E_p$  lze psát:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum M\varphi = \frac{1}{2} \left( M_{0,1}\varphi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} M_{i,i+1}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \right) = \\ = \frac{1}{2}k \left( 2\varphi_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right). \quad (7.12)$$

## 7.3 Pohybové rovnice

Pohybové rovnice pro model dostaneme z Lagrangeových rovnic:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega_s} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (7.13)$$

přičemž uijeme také substituce (7.4), abychom obdrželi soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu, kterou potřebujeme pro numerické řešení. Dle (7.4) dostáváme:

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \omega_s, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (7.14)$$

čímž získáme soustavu  $2n$  diferenciálních rovnic prvního řádu. Lze snadno dokázat, že v našem případě lze výraz (7.13) užitím výrazů (7.2), (7.10) a (7.12) zjednodušit na:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \omega_s} \right) = \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_s} - \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (7.15)$$

Dle vztahu (7.10) pro kinetickou energii  $E_k$  můžeme obecně psát:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \omega_s} = \frac{1}{6} ml^2 \left[ 2\omega_s(3(n-s)+1) + 3(2(n-s)+1) \sum_{j=1}^{s-1} \omega_j \cos(\varphi_s - \varphi_j) + \right. \\ \left. + 3 \sum_{i=s+1}^n (2(n-i)+1) \omega_i \cos(\varphi_i - \varphi_s) \right], \quad s = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (7.16)$$

z čehož po derivaci podle času získáme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \omega_s} \right) = \frac{1}{6} ml^2 \left[ \frac{d\omega_s}{dt} 2(3(n-s)+1) + \right. \\ \left. + 3(2(n-s)+1) \sum_{j=1}^{s-1} \frac{d\omega_j}{dt} \cos(\varphi_s - \varphi_j) + \right. \\ \left. + 3 \sum_{i=s+1}^n (2(n-i)+1) \frac{d\omega_i}{dt} \cos(\varphi_i - \varphi_s) \right] - \\ - \frac{1}{6} ml^2 \left[ 3(2(n-s)+1) \sum_{j=1}^{s-1} \omega_j \sin(\varphi_s - \varphi_j) (\omega_s - \omega_j) + \right. \\ \left. + 3 \sum_{i=s+1}^n (2(n-i)+1) \omega_i \sin(\varphi_i - \varphi_s) (\omega_i - \omega_s) \right], \end{aligned} \quad (7.17)$$

což platí pro  $s = 1, 2, \dots, n$ . Tento vztah je úmyslně rozdělen na dvě části. V kanonickém zápisu bude totiž v pořadí první část figurovat na levé straně pohybových rovnic (jsou zde přítomné derivace úhlových rychlostí) a druhá část na pravé straně pohybových rovnic.

Dále můžeme odvodit, že platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_s} = \frac{1}{6} ml^2 \left[ 3\omega_s \left( -(2(n-s)+1) \sum_{j=1}^{s-1} \omega_j \sin(\varphi_s - \varphi_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=s+1}^n (2(n-i)+1) \omega_i \sin(\varphi_i - \varphi_s) \right) \right], \quad s = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Všimněme si, že je tento vztah velmi podobný v pořadí druhé části předcházejícího vztahu (7.17). Sloučení těchto dvou vztahů bude patrné až v maticovém zápisu pohybových rovnic (7.20) jako maticový součin  $\mathbf{Q}\omega^2$ , kde  $\omega^2$  je vektor druhých mocnin úhlových rychlostí.

Nakonec užitím vztahu pro potenciální energii  $E_p$  (7.12) získáme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} &= 3k\varphi_1 - k\varphi_2, \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_s} &= -k\varphi_{s-1} + 2k\varphi_s - k\varphi_{s+1}, \quad s = 2, \dots, n-1, \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi_n} &= -k\varphi_{n-1} + k\varphi_n.\end{aligned}\tag{7.19}$$

### 7.3.1 Maticový tvar

Složením vztahů (7.17), (7.18) a (7.19) lze završit odvození pohybových rovnic modelu. Pro přehlednější zápis bude vhodnější převést soustavu rovnic do maticového tvaru. Pohybové rovnice lze zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} \frac{d}{dt} \omega &= \mathbf{Q} \omega^2 - \mathbf{K} \varphi, \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \omega,\end{aligned}\tag{7.20}$$

kde  $\omega$ ,  $\varphi$  jsou vektory stavových proměnných systému, přičemž  $\omega^2$  je vektor druhých mocnin úhlových rychlostí. Maticový součin  $\mathbf{M} \frac{d}{dt} \omega$  reprezentuje první část vztahu (7.17), maticový součin  $\mathbf{Q} \omega^2$  vznikl složením druhé části vztahu (7.17) se vztahem (7.18) a poslední maticový součin  $\mathbf{K} \varphi$  má původ ve vztahu (7.19).

Matice  $\mathbf{M}$  je symetrická a představuje momenty setrvačnosti dílců. Platí pro ni:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} m l^2 \begin{bmatrix} 2(3(n-1)+1) & 3(2(n-2)+1) & 3(2(n-3)+1) & \dots & 3 \\ & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \dots & \cos(\varphi_n - \varphi_1) \\ & & 2(3(n-2)+1) & 3(2(n-3)+1) & 3 \\ & & & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & \dots & \cos(\varphi_n - \varphi_2) \\ & & & & 2(3(n-3)+1) & \dots & 3 \\ & & & & & \dots & \cos(\varphi_n - \varphi_3) \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix} \cdot \tag{7.21}$$

*symetrie*

Bližší pohled na matici  $\mathbf{M}$  odhalí, že při malých posunutích (tj. malých hodnotách pootočení dílců  $\varphi$ ) bude přibližně konstantní – což odpovídá lineárnímu řešení (momenty setrvačnosti dílců nejsou závislé na jejich pootočení).

Jiná situace je u matice  $\mathbf{Q}$ , která je antisymetrická s nulami na diagonále, jejíž význam roste s růstem posunutí. Lze ji vyjádřit vztahem:

$$\mathbf{Q} = \frac{3}{6}ml^2 \begin{bmatrix} 0 & (2(n-2)+1)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & (2(n-3)+1)\sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_1) \\ -(2(n-2)+1)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & (2(n-3)+1)\sin(\varphi_3 - \varphi_2) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_2) \\ -(2(n-3)+1)\sin(\varphi_3 - \varphi_1) & -(2(n-3)+1)\sin(\varphi_3 - \varphi_2) & 0 & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sin(\varphi_n - \varphi_1) & -\sin(\varphi_n - \varphi_2) & -\sin(\varphi_n - \varphi_3) & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Všiměme si, že při malých posunutích mají členy této matice téměř nulové hodnoty. Z toho zřejmě vyplývá, že se tato matice v lineárním řešení nevyskytuje.

Poslední maticí v odvozeném konzervativním modelu je pásová matice tuhosti  $\mathbf{K}$ , pro kterou platí:

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 1 & & \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

## 7.4 Vlastnosti speciálního modelu

Uveďme výhody a nevýhody tohoto modelu vzhledem k modelu dle obecné metody tuhých dílců (kapitola 6.2):

+

rychlost výpočtu (eliminovány vyšší frekvence),  
 nízký počet stavových proměnných,  
 jednoduché vyjádření potenciální energie systému – jednoduchá matice tuhosti,

–

plná matice hmotnosti – nutno řešit soustavu algebraických rovnic,  
 nelze snadno zobecnit pro plošné a prostorové konstrukce,  
 relativně složité odvození.

## 7.5 Aplikovaný model konzoly

Víme, že konzervativní model pro simulace kmitání reálné konstrukce nepostačuje, jelikož v něm nejsou vystiženy důsledky různých druhů disipace energie. Také je třeba zahrnout do modelu zatížení, bez kterého bychom nemohli sledovat zajímavé nelineární jevy při vývoji stavu konstrukce. Dále imperfekce prutu, bez kterých by úloha nevykazovala reálně vždy přítomnou nesymetrii. A navíc přítomnost soustředěné hmoty na volném konci konzoly, jejíž role bude vysvětlena v následující kapitole 8. Věnujme se tedy doplnění odvozeného modelu o vyjmenované chybějící složky.

### 7.5.1 Tlumení

Výstižná aproximace tlumení vyžaduje experimentální výzkum při konkrétních podmínkách, nicméně zkušenosti ukazují možnosti určitého zobecnění, které často vyhovuje. Upravme pohybové rovnice (7.20) do tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{d}{dt} \omega &= \mathbf{Q} \omega^2 - \mathbf{K} \varphi - \mathbf{C} \omega, \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \omega, \end{aligned} \tag{7.24}$$

kde  $\mathbf{C}$  je tzv. *matice útlumu*. Je-li tato matice konstantní, pak se jedná zřejmě o jednu z nejjednodušších aproximací tlumení – útlum lineárně závislý na rychlosti posunutí, viz kapitola 2.2.3.

S pomocí experimentů, o kterých bude řeč v následující kapitole 8, bylo zjištěno, že chování reálné konstrukce dobře vystihuje matice útlumu ve tvaru:

$$\mathbf{C} = cm \begin{bmatrix} 1 + c_a |\omega_1| & & & \\ & 1 + c_a |\omega_2| & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 + c_a |\omega_n| \end{bmatrix}, \tag{7.25}$$

kde  $c$  je globální koeficient útlumu a  $c_a$  je bezrozměrný kvadratický koeficient uplatňující se zejména při velmi velkých posunutích (souvisí zřejmě s odporem vzduchu, který je závislý na druhé mocnině rychlosti).

### 7.5.2 Soustředěná hmota na volném konci

Z důvodů zlepšení vlastností konstrukce, které jsou detailně popsány v následující kapitole 8, byla na volný konec konzolového nosníku přidána soustředěná hmota. Její přítomnost lze v pohybových rovnicích zohlednit jako koncentrovanou hmotu následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a) \frac{d}{dt} \omega &= (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_a) \omega^2 - \mathbf{K} \varphi, \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \omega, \end{aligned} \tag{7.26}$$

kde matice  $\mathbf{M}_a$  a  $\mathbf{Q}_a$  zohledňují vliv přidané hmoty o setrvačné hmotnosti  $m_a$ . Pro matici momentů setrvačnosti přidané hmoty  $\mathbf{M}_a$  platí:

$$\mathbf{M}_a = m_a l_c^2 \begin{bmatrix} 1 & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \cdots & \cos(\varphi_n - \varphi_1) \\ & 1 & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & \cdots & \cos(\varphi_n - \varphi_2) \\ & & 1 & \cdots & \cos(\varphi_n - \varphi_3) \\ \text{symetrie} & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

a pro matici  $\mathbf{Q}_a$  platí:

$$\mathbf{Q}_a = m_a l_c^2 \begin{bmatrix} 0 & \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_1) \\ -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_2) \\ -\sin(\varphi_3 - \varphi_1) & -\sin(\varphi_3 - \varphi_2) & 0 & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sin(\varphi_n - \varphi_1) & -\sin(\varphi_n - \varphi_2) & -\sin(\varphi_n - \varphi_3) & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

### 7.5.3 Imperfekce úlohy

Při odvození pohybových rovnic modelu prutu jsme nesymetrie úlohy neuvažovali – model je tedy dokonale symetrický, což neodpovídá realitě. Zavedení nesymetrie do modelu je možno provést mnoha způsoby. Předpokládejme, že je reálná nesymetrie systému „malá“. Lze ukázat že „malou“ nesymetrii výstižně nahrazují libovolné vhodné reprezentace, které nemusejí nutně odpovídat dominantní imperfekci. Počáteční zakřivení prutu tak lze nahradit například excentricitou vzpěrného zatížení.

Zde budeme imperfekci reprezentovat „malou“ silou, působící příčně na volný konec prutu na stranu imperfekce. Tuto reprezentaci pojmem obecněji zahrnutím působení obecné síly  $F$ , umístěné na volný konec prutu. Pohybové rovnice (7.20) upravíme do tvaru:

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \omega = \mathbf{Q} \omega^2 - \mathbf{K} \varphi + \mathbf{F}, \quad (7.29)$$

$$\frac{d}{dt} \varphi = \omega,$$

kde vektor  $\mathbf{F}$  reprezentuje ohybové momenty síly  $F$ . Platí:

$$\mathbf{F} = F_x l \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 \\ \vdots \\ \cos \varphi_n \end{bmatrix} - F_y l \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \\ \vdots \\ \sin \varphi_n \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

kde  $F_x$  je složka síly  $F$  ve směru osy  $x$  (osa nepřetvořeného prutu) a  $F_y$  je složka síly  $F$  ve směru osy  $y$  (osa kolmá na osu nepřetvořeného prutu v rovině ohybu).

#### 7.5.4 Gravitace a dynamické zatěžování

Gravitaci i dynamické zatěžování posunutím bodu vetknutí prutu (bude vysvětleno v následující kapitole 8) můžeme nahradit soustavou tíhových resp. setrvačných sil, působících v těžištích tuhých dílců ve směru působení gravitace či zrychlení vyvolaného posunutím.

Pro velikost tíhové síly  $F_g$  na segmentu o hmotnosti  $m$  platí  $F_g = m g$ , kde  $g$  je intenzita gravitačního pole (gravitačního zrychlení). A obdobně pro velikost setrvačné síly  $F_a$ , působící na segmentu o setrvačné hmotnosti  $m$  platí  $F_a = m a$ , kde  $a$  je zrychlení, jemuž je prut podroben<sup>1</sup>.

Pro obecné zrychlení  $a$ , kterému je vystavena konstrukce s přidanou hmotou, můžeme pohybové rovnice (7.26) upravit:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a) \frac{d}{dt} \omega &= (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_a) \omega^2 - \mathbf{K} \varphi + \mathbf{A}, \\
 \frac{d}{dt} \varphi &= \omega,
 \end{aligned}
 \tag{7.31}$$

kde pro vektor momentů setrvačných sil  $\mathbf{A}$  platí:

$$\mathbf{A} = a_x l \begin{bmatrix} \left( \frac{(2(n-1)+1)}{2} m + m_a \right) \cos \varphi_1 \\ \left( \frac{(2(n-2)+1)}{2} m + m_a \right) \cos \varphi_2 \\ \vdots \\ \left( \frac{1}{2} m + m_a \right) \cos \varphi_n \end{bmatrix} - a_y l \begin{bmatrix} \left( \frac{(2(n-1)+1)}{2} m + m_a \right) \sin \varphi_1 \\ \left( \frac{(2(n-2)+1)}{2} m + m_a \right) \sin \varphi_2 \\ \vdots \\ \left( \frac{1}{2} m + m_a \right) \sin \varphi_n \end{bmatrix}, \tag{7.32}$$

kde  $a_x$  je složka zrychlení  $a$  ve směru osy  $x$  (osa nepřetvořeného prutu) a  $a_y$  je složka zrychlení  $a$  ve směru osy  $y$  (osa kolmá na osu nepřetvořeného prutu).

#### 7.5.5 Aplikovaný model

Seskupením všech dílčích přidaných členů, viz vztahy (7.24), (7.29) a (7.31), dostáváme aplikovaný model konzoly v kompaktním tvaru:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_a) \frac{d}{dt} \omega &= (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_a) \omega^2 - \mathbf{K} \varphi - \mathbf{C} \omega + \mathbf{F} + \mathbf{A}, \\
 \frac{d}{dt} \varphi &= \omega.
 \end{aligned}
 \tag{7.33}$$

---

<sup>1</sup>Tato úvaha vychází z platnosti principu ekvivalence účinku gravitace a zrychlení.



# Kapitola 8

## Experiment

V této kapitole si ukážeme konstrukci vybranou pro experimentální výzkum, popíšeme postup identifikace modelu a srovnáme výsledky experimentu s výsledky numerických simulací.

Modelování mechanických konstrukcí pomocí metod popsaných v kapitole 6 vystihuje realitu do jisté míry fenomenologickým přístupem. Model je třeba chápat jako zástupce a řešení úlohy jako simulaci. Zpravidla není třeba, aby úroveň složitosti modelu dosahovala úroveň složitosti skutečnosti<sup>1</sup>. V tomto smyslu je zapotřebí ověřit, zda model věrně popisuje podstatné rysy úlohy<sup>2</sup>.

### 8.1 Konstrukce

Vzhledem k očekávané složitosti úlohy je potřeba, aby konstrukce byla co nejjednodušší a zároveň měla tyto, zdánlivě protichůdné, vlastnosti:

- materiál konstrukce se musí v celém sledovaném oboru chovat pružně (je třeba dosahovat co nejnižších přetvoření materiálu),
- odezva konstrukce by měla být výrazně nelineární,
- v materiálu nesmí docházet k patrným nevratným změnám (reologické jevy).

Úloha dynamického vzpěru velmi štíhlého ocelového konzolového nosníku se ukázala být z tohoto hlediska nejlépe vyhovující. Svisle orientovaný prut konstantního průřezu, pevně vetknutý svým dolním koncem (viz obr. 8.1), je podroben vertikálnímu zrychlení.

Vybraná ocel je materiál, který se chová pružně v dostatečně velkém rozsahu. Přitom, užije-li se štíhlý nosník z této oceli, může docházet k velkým posunutím při malých přetvořeních<sup>3</sup>, což zajistí setrvání materiálu v lineárně pružné oblasti působení.

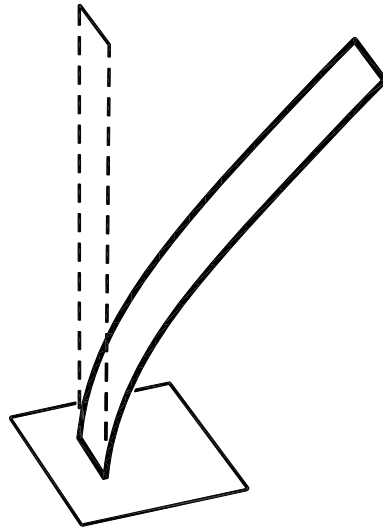
Zdrojem nelinearity odezvy konstrukce jsou právě velká posunutí a obzvlášť pokritické působení při vzpěru prutu (existují dva statické stavy). Z hlediska stability přímého tvaru prutu je rozhodující pro dosažení kritického stavu vertikální zrychlení (tj. ve statickém stavu nejjednodušeji gravitace).

---

<sup>1</sup>V duchu teorie nelineárních dynamických systémů je správné hledat co nejjednodušší model dané reálné úlohy, který zachovává to podstatné pro její výstižné řešení, viz [54].

<sup>2</sup>Například existence odpovídajících kritických bodů (kvalitativní shoda).

<sup>3</sup>*Posunutím* máme na mysli změnu polohy bodů konstrukce (posun, pootočení). *Přetvoření* zde zastupuje relativní změnu vzdálenosti dvou blízkých bodů materiálu.



Obrázek 8.1: Znázornění vybrané úlohy pro experimentální výzkum: Svislý vzpíráný vetknutý prut v pokritickém stavu

Za daných podmínek jsou rozhodující parametry prutu:

- celková délka  $l_c$ ,
- celková hmotnost  $m_c$ ,
- ohybová tuhost  $EI$ .

Kritické zrychlení<sup>4</sup>  $a_{cr}$  je dle těchto parametrů dáno přibližně vztahem (viz [53], [56]):

$$a_{cr} = 7.837 \frac{EI}{m_c l_c^2}. \quad (8.1)$$

Pro vlastní frekvenci volného kmitání prutu v horizontální rovině (tj. bez vlivu gravitace) při malých posunutích přibližně platí vztah (dle [7]):

$$f_{hor} = \frac{1.875^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m_c l_c^3}}. \quad (8.2)$$

Z hlediska chování přímého prutu ve vzpěru je také podstatné znát odchylky prutu od symetrie úlohy – imperfekce. Velikost imperfekcí rozhoduje o dominanci jedné strany vybočení prutu a významně ovlivňuje dynamické chování prutu v okolí kritického stavu. Imperfekcím se budeme zvlášť věnovat v kapitole 8.3.2

<sup>4</sup>Kritickým zrychlením se rozumí takové zrychlení, které způsobí ztrátu stability přímého tvaru prutu.

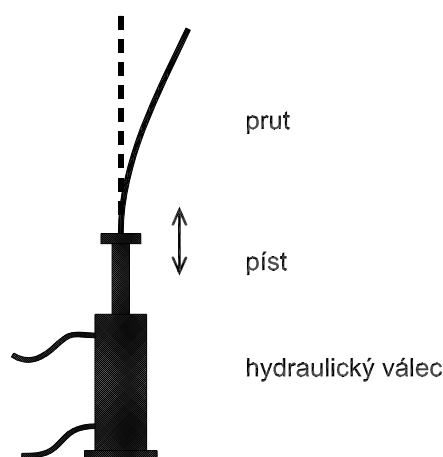
## 8.2 Dynamické zatěžování

Pro dynamické zatěžování konstrukce bylo zvoleno vertikální harmonické posunutí bodu vetknutí prutu. Dle *principu ekvivalence* lze zrychlení vyvolané posunutím chápat jako změnu intenzity gravitačního pole, čehož je využito v numerickém modelu úlohy, viz kapitola 7.5.4.

Z hlediska realizace experimentu je ovšem vytvoření harmonického pohybu v přímce obtížné. Jedním z možných řešení, které také bylo užito, je umístění prutu na pohyblivém konci pístu hydraulického zařízení, viz obr. 8.2. Píst, zvedaný hydraulickým zařízením řízeným počítačem, koná harmonický pohyb<sup>5</sup> s danou úhlovou frekvencí  $\Omega$  a s danou amplitudou posunutí  $A_{displ}$ . Těmito dvěma nastavitelnými parametry je určována amplituda zrychlení pístu  $A_{accel}$  dle vztahu<sup>6</sup>:

$$A_{accel} = A_{displ} \Omega^2. \quad (8.3)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že pro dosažení dostatečně velkého zrychlení (vzhledem ke gravitaci) je potřeba buď vysoké frekvence pístu nebo velké amplitudy posunutí pístu. Oba směry zvyšování amplitudy zrychlení ovšem narážejí na reálná omezení.



Obrázek 8.2: Experimentální sestava pro dynamické zatěžování

## 8.3 Konfigurace

Numerické simulace experimentu ukázaly, že na nelineární jevy bohatá oblast v konfiguračním prostoru (prostor parametrů systému) je poměrně úzká. Klíčové faktory jsou zejména následující:

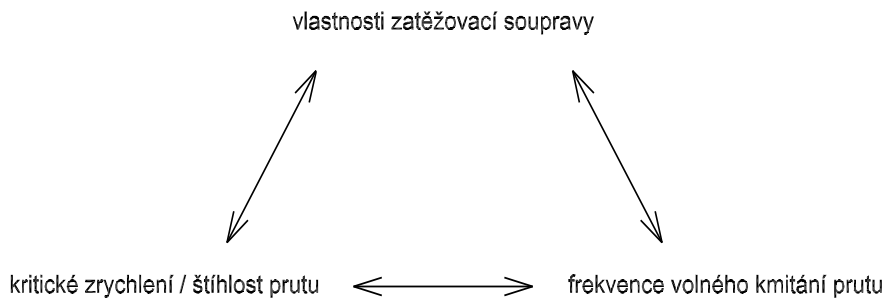
- prut musí být co nejštíhlejší (tj. mít schopnost dosahovat velkých pružných posunutí),

<sup>5</sup>Poznamenejme, že reálná zařízení dosahují harmonického pohybu vždy v určitém přiblížení. V případě hydraulického zařízení se přesnost harmonického pohybu snižuje se vzrůstající frekvencí.

<sup>6</sup>Vztah je odvozen z pohybové rovnice pístu za předpokladu jeho harmonického pohybu.

- staticky musí být prut v kritické oblasti (tj. v prekritickém stavu v blízkosti kritického zatížení nebo v pokritickém stavu těsně po dosažení kritického zatížení),
- první vlastní frekvence volného kmitání prutu musí být co nejvyšší (vzhledem k realizaci dostatečné amplitudy zrychlení),
- frekvence zrychlení musí být blízká první vlastní frekvenci prutu při volném kmitání,
- vhodným parametrem pro sledování kvalitativních změn stavu systému (řídící parametr v bifurkačním diagramu) je amplituda zrychlení a musí být proto měnitelná dostatečně jemně v dostatečném rozsahu.

Při bližším pohledu na vypsání klíčové požadavky zjistíme, že tvoří trojici protichůdných potřeb, viz obr. 8.3. Na jedné straně (na obrázku nahoře) stojí zatěžovací zařízení, které je omezující zejména maximální amplitudou posunutí. Na druhé straně (na obrázku dole) je prut v němž se sváří dva protichůdné požadavky. Zvyšování štíhlosti, z důvodu co nejnižších přetvoření materiálu a z důvodu co nejnižšího kritického zrychlení, proti snižování štíhlosti pro zvýšení vlastní frekvence při volném kmitání prutu, z důvodu získání co nejvyšší možné amplitudy zrychlení, dle vztahu (8.3).



Obrázek 8.3: Trojice proti sobě jdoucích požadavků

Řešení tohoto problému protichůdných požadavků je poměrně obtížné. Byly vzaty do úvahy současně dva směry:

- miniaturizace prutu (vyšší vlastní frekvence při větší štíhlosti),
- přidání soustředěné hmoty na konec prutu (nižší kritické zrychlení při menší štíhlosti).

Výsledkem těchto úvah, provedených simulací a hledání (včetně měření vlastností) vhodného ocelového prutu je následující konfigurace „statických“ parametrů prutu (měření ohybové tuhosti  $EI$  vybraného prutu lze nalézt v následující kapitole 8.3.1):

- délka prutu  $l_c = 30$  centimetrů,
- hmotnost prutu  $m_c = 9.03$  gramů,
- ohybová tuhost prutu  $EI = 0.0053$  Pa.m<sup>4</sup>,
- přidaná hmota na konec prutu  $m_a = 13.54$  g.

Těmto parametrům odpovídají následující vlastnosti prutu bez přidané hmoty:

- kritické zrychlení prutu  $a_{cr} = 51 \text{ m/s}^2$  (získáno numerickou simulací  $51 \text{ m/s}^2$ , vypočteno dle vztahu (8.1)  $51.1 \text{ m/s}^2$ ),
- vlastní frekvence při volném kmitání v horizontální rovině (tj. bez vlivu gravitačního zrychlení) při malých posunutích  $f_{hor} = 2.60 \text{ Hz}$  (změřena experimentem  $2.598 \text{ Hz}$ , změřena numerickou simulací  $2.606 \text{ Hz}$ , vypočtena dle vztahu (8.2)  $2.609 \text{ Hz}$ ),
- vlastní frekvence při kmitání ve vertikální rovině (tj. s vlivem gravitačního zrychlení) při malých posunutích  $f_{ver} = 2.34 \text{ Hz}$  (změřena experimentem  $2.347 \text{ Hz}$ , změřena numerickou simulací  $2.344 \text{ Hz}$ ).

Z hlediska experimentu jsou ovšem důležitější vlastnosti prutu s přidanou hmotou (přidaná hmota snižuje frekvenci volného kmitání a snižuje kritické zrychlení prutu). Pro kritické zrychlení prutu s přidanou hmotou přibližně platí (lze snadno odvodit; srov. se vztahem (8.1)):

$$a_{cr,a} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{(0.315 m_c + m_a) l_c^2}. \quad (8.4)$$

Pro vlastní frekvenci volného kmitání prutu v horizontální rovině (tj. bez vlivu gravitace) s přidanou hmotou při malých posunutích platí přibližně vztah (dle [7] str. 240; srov. se vztahem (8.2)):

$$f_{hor,a} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{(0.243 m_c + m_a) l_c^3}}. \quad (8.5)$$

Vlastnosti prutu s přidanou hmotou byly zjištěny, v souladu s výše uvedenými parametry, následující:

- kritické zrychlení prutu  $a_{cr,a} = 8.9 \text{ m/s}^2$  (experimentálně ověřeno nepřímou – prut je v pokritickém stavu, získáno numerickou simulací  $8.9 \text{ m/s}^2$ , vypočteno dle vztahu (8.4)  $8.87 \text{ m/s}^2$ ),
- vlastní frekvence při volném kmitání v horizontální rovině při malých posunutích  $f_{hor,a} = 0.975 \text{ Hz}$  (získáno numerickou simulací  $0.975 \text{ Hz}$ , vypočteno dle vztahu (8.5)  $0.974 \text{ Hz}$ ),
- vlastní frekvence při volném kmitání ve vertikální rovině při velkých posunutích blízko stacionárního stavu (prut je při kmitání ve vertikální rovině v pokritickém stavu)  $f_{ver,a} = 0.43 \text{ Hz}$  (získáno numerickou simulací).

Reálným experimentálním zatěžovacím zařízením byla těžká hydraulická zatěžovací souprava (zkonstruovaná pro dynamické zatěžování velkých stavebních objektů), kterou vlastní partnerská univerzita Bauhaus-Universität Weimar v Německu, viz příloha C. Konfigurace parametrů této soupravy je následující:

- zvolená frekvence pístu (dle parametrů prutu)  $f_{load} = 0.5 \text{ Hz}$  (tj. úhlová frekvence  $\Omega_{load} = 3.1416 \text{ rad.s}^{-1}$ ),
- maximální amplituda posunutí pístu  $A_{displ} = 10 \text{ cm}$  (tj. maximální amplituda zrychlení  $A_{accel} = 0.987 \text{ m.s}^2$  při zvolené frekvenci pístu  $f_{load}$ ).

### 8.3.1 Měření ohybové tuhosti prutu $EI$

Stanovení ohybové tuhosti vybraného štíhlého prutu je poměrně náročné. Pro plánovaný experiment bylo provedeno více různých měření, která jsou zde podrobněji popsána.

#### Měření průhybu postupným zatěžováním

Klasické měření ohybové tuhosti  $EI$  vybraného prutu postupným zatěžováním (bez speciálního zařízení) je značně komplikováno jeho rozměry a jeho vysokou štíhlostí. Velká štíhlost prutu negativně ovlivňuje měření průhybu od daného zatížení, jelikož je prut od samotné vlastní tíhy významně prohnut. Při velkých průhybech pak již není možno uvažovat linearitu vztahu zatížení – průhyb, což znesnadňuje vyhodnocení měření.

Orientování roviny ohybu prutu do horizontální polohy sice vyřeší problém s vlivem vlastní tíhy, nicméně objeví se zde obtížnější problém s nanesením zatížení, které dosahuje nízkých hodnot (řádově  $10^{-1}$  N).



Obrázek 8.4: Znázornění zatěžování štíhlého prutu pro stanovení ohybové tuhosti

Pro první měření ohybové tuhosti vybraného prutu byla vybrána vertikálně orientovaná rovina ohybu. Problém s velkými posuvy byl vyřešen snížením jeho délky, čímž na důležitosti získala přesnost měření průhybu. Na obr. 8.5 je vidět graf síla – průhyb pro prut délky 7 cm zatěžovaný dle obr. 8.4 příkládanými podložkami o hmotnosti 3.67 g.

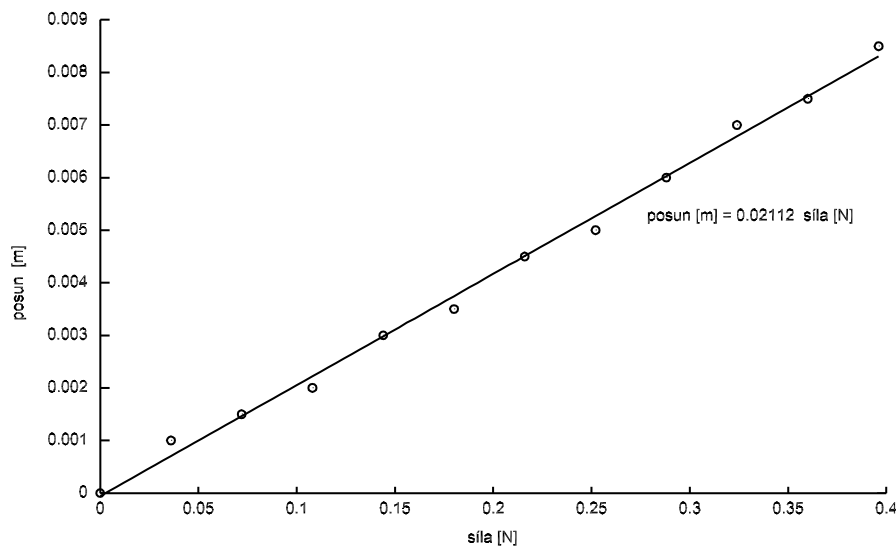
Výhodou tohoto způsobu měření ohybové tuhosti je zejména jednoduchost a nenáročnost na provedení.

Z měření, jehož výsledný graf včetně aproximace je zobrazen na obr. 8.5, vyšla ohybová tuhost  $EI = 0.0054 \pm 0.0002 \text{ Pa}\cdot\text{m}^4$ .

#### Měření první vlastní frekvence při volném kmitání

Ohybovou tuhost štíhlého prutu je možné stanovit z frekvence volného kmitání. Přesněji je možno určit první vlastní frekvenci při volném kmitání v oblasti malých posunutí – první vlastní frekvenci lineárního kmitání. Při znalosti hmotnosti prutu a této frekvence pak lze spočítat ohybovou tuhost  $EI$  dle vztahu (8.2). Musí přitom platit, že je kmitání prutu málo tlumeno, což je u ocelových prutů obvykle splněno.

Pro měření vlastní frekvence byl v horizontální rovině volně kmitající prut snímán videokamerou. Záznam videokamery potom sloužil pro stanovení počtu kmitů za danou dobu



Obrázek 8.5: Graf měření ohybové tuhosti postupným zatěžováním

měření. Jelikož byla hmotnost prutu známa velmi přesně, dalo toto měření spolehlivější hodnotu  $EI = 0.0053 \pm 0.0001 \text{ Pa}\cdot\text{m}^4$ . To je hodnota, která již byla uvedena v předchozí kapitole, včetně srovnání naměřených vlastních frekvencí. Tato hodnota byla potvrzena doplňkovým měřením průhybů způsobených gravitací, popsáním dále.

### Měření průhybu způsobeného vlastní tíhou

Vlastní tíha a její vliv, který byl u postupného zatěžování na překážku, je zde naopak výhodou. Aby to bylo možno říci, je třeba i zde dostatečně přesně znát hmotnost prutu. Je-li tato podmínka splněna, pak lze tímto měřením dosáhnout velmi přesných výsledků.

Při přípravě experimentu byli použity dvě konfigurace měření, zejména pro kontrolu již stanovené ohybové tuhosti:

- měření průhybu horizontálně orientovaného prutu (obyčejný ohyb),
- měření pokritických tvarů vertikálně orientovaného prutu (problém vzpěru).

Nevýhodou tohoto postupu je jednak nutnost přesné znalosti hmotnosti prutu a také obtížnější vyhodnocení. Pro kvalitní vyhodnocení je totiž, vzhledem k velkým posunutím, zapotřebí dobrý numerický model, vystihující geometrickou nelinearitu problému.

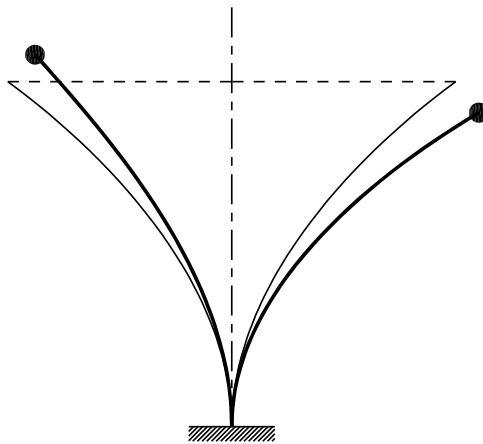
### 8.3.2 Imperfekce prutu

Posledním z uvažovaných „statických“ parametrů modelu pro vystižení chování reálného prutu je reprezentace jeho nedokonalosti z hlediska symetrie úlohy – imperfekce. Tento parametr je popisován až nyní, protože nijak významně neovlivňoval předcházející úvahy<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Přesto nelze říci, že by role imperfekce v úloze byla nějak méněcenná. Důležitost narušení symetrie úlohy je často opomíjena a bývá zdrojem nečekaných překvapení ve změnách chování numerických modelů.

Již při popisu zahrnutí imperfekcí do numerického modelu v kapitole 7.5.3 bylo zmíněno, jakým způsobem je nahlíženo na nedokonalosti symetrie úlohy. Malé imperfekce lze bez provedení zatěžovacího experimentu určit jen obtížně. Prvním důvodem je jejich velikost a druhým důvodem jejich množství. Výhodou poruchy (malé nedokonalosti) symetrie úlohy z hlediska experimentu pro tuto práci je, že nezáleží nijak významně na dominantním zdroji nesymetrie, ale jen na její velikosti vzhledem k chování systému. Tato úvaha vede na jednoduchou reprezentaci všech reálných imperfekcí pomocí zvolené jediné *fiktivní* imperfekce.

Stanovení velikosti takové fiktivní imperfekce je pak vázáno na provedení experimentu, např. pokritického vzpěru prutu, viz obr. 8.6. Experimentem se odhalí velikost imperfekcí a požaduje se, aby fiktivní imperfekce numerického modelu dávala výsledky odpovídající výsledkům experimentu.



Obrázek 8.6: Znázornění stanovení fiktivní imperfekce z nesymetrie pokritických tvarů

Na obr. 8.6 je vidět použitá metoda zjištění „velikosti“ imperfekce prutu. Pro určitou hodnotu pokritického zatížení (přidaná hmota na volném konci prutu) se srovnaly pokritické tvary na levé a pravé straně. Poznamenejme, že při pokritickém působení v těsné blízkosti kritického stavu je stabilita prutu snížena<sup>8</sup>. I malá imperfekce se tak při raném pokritickém působení velmi výrazně projeví.

V kapitole 7.5.3 byl popsán způsob reprezentace imperfekce pomocí malé příčné síly, působící na volném konci prutu. Velikost této síly byla odhadnuta dle srovnání pokritických tvarů prutu hodnotou (v návaznosti na orientaci prutu a užitý souřadný systém):

- síla reprezentující imperfekci  $F_{y,imp} = -0.001$  N.

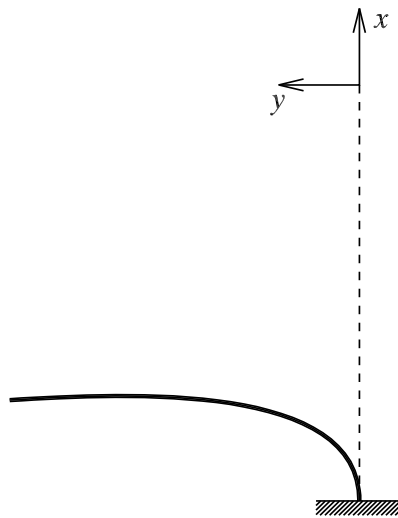
### 8.3.3 Měření vlastností útlumu

Tlumení, doprovázející kmitání konstrukce, je teoreticky nejsložitější součástí studovaného systému. Tento problém byl podrobněji rozebrán v kapitole 2.2.3.

<sup>8</sup>Snížení stability systému je zde chápáno jako změna tvaru plochy potenciální energie – zejména snížení její křivosti v okolí daného stabilního statického stavu. To lze interpretovat například pomocí zvýšení doby nutné k restituci (znovuustavení) statického stavu, po vychýlení systému z tohoto stavu.



Zjištění vlastností útlumu a jeho reprezentace v numerickém modelu se zakládá na podobném principu, jak tomu bylo u imperfekce. Je třeba pouze vystihnout důsledky tlumících jevů na chování systému. Pro tento účel byl proveden oddělený dynamický experiment, jenž byl zaměřen na měření amplitud příčné výchylky prutu při volném kmitání. Volné kmitání bylo započato udělenou počáteční deformací prutu (orientovaného ve vertikální pozici) takovou, aby přibližně odpovídala stavu prutu při kmitání v oblasti velkých posunutí, viz obr. 8.7. Kmitání bylo snímáno běžnou videokamerou (SONY DCR) se vzorkovací frekvencí 25 Hz, viz příloha C a D.



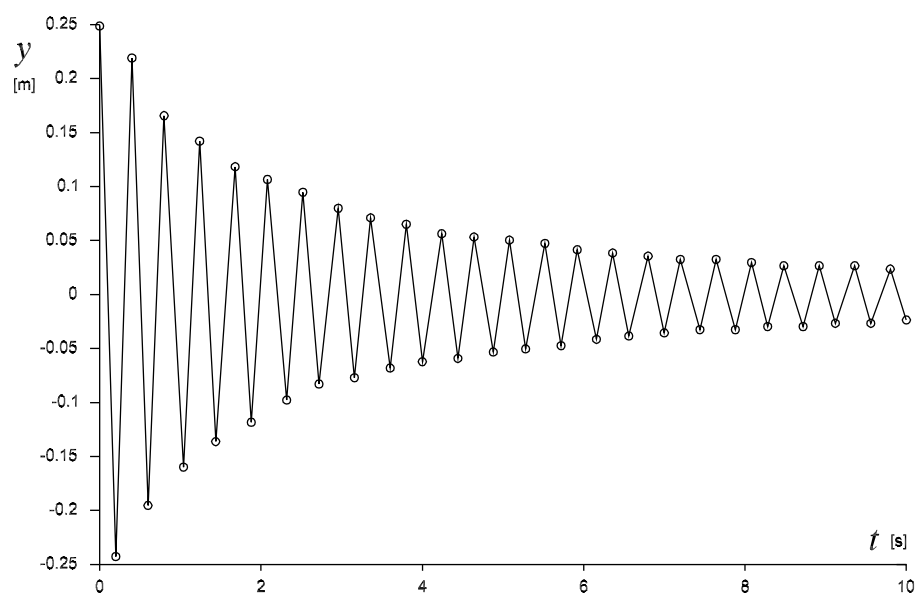
Obrázek 8.7: Počáteční stav volného kmitání a použitý souřadný systém pro měření polohy volného konce prutu

Měření proběhlo pro prut bez přidané hmoty (prekritický stav) a s přidanou hmotou  $m_a = 8$  g (rovněž prekritický stav). Srovnání výsledků těchto měření pak sloužilo k ověření role přidané hmoty v procesu tlumení prutu.

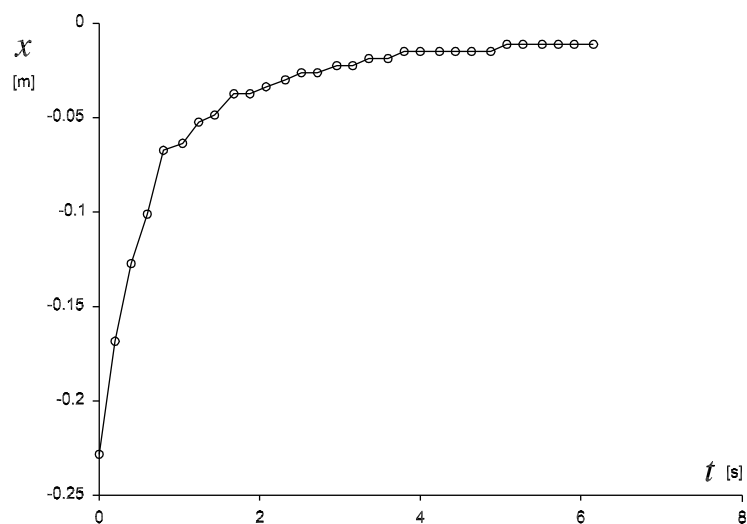
Na obr. 8.8 a 8.9 jsou grafy naměřených amplitud souřadnic volného konce nosníku (viz obr. 8.7) při volném kmitání v oblastech velkých posunutí bez přidané hmoty a na obr. 8.10 a 8.11 totéž s přidanou hmotou  $m_a = 8$  g.

S podporou numerických výpočtů bylo zjištěno, že lineární útlum je nevyhovující. Obálka amplitud při volném kmitání se totiž výrazně odchyľuje od exponenciály. Tento problém vyřešilo rozšíření funkce útlumu na polynom druhého stupně, přidáním kvadratického členu: tlumící moment  $T(\omega) = c\omega(1 + c_a|\omega|)$ , viz vztah (7.25) v kapitole 7.5.1. Koeficienty polynomu byly stanoveny:

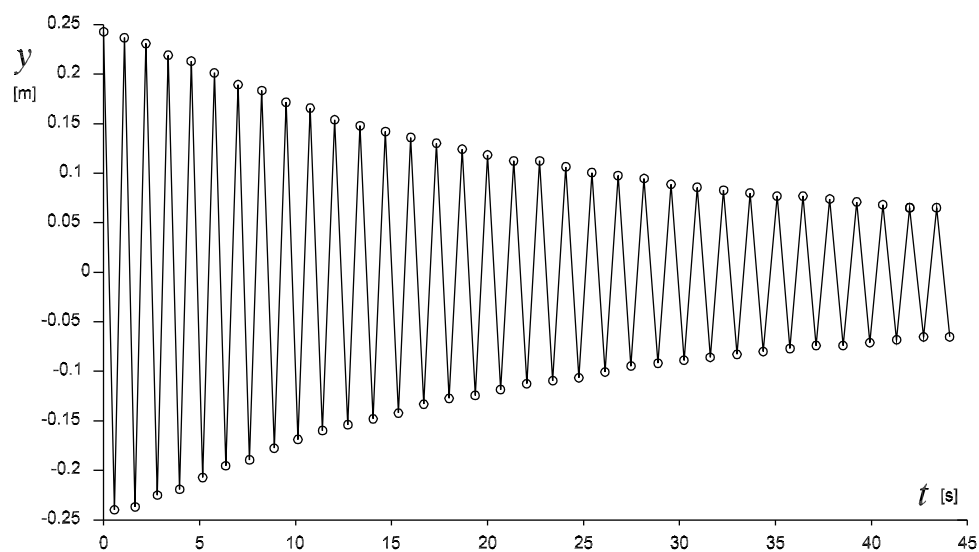
- koeficient útlumu  $c = 0.002$  N.m.s.kg<sup>-1</sup>,
- kvadratický koeficient  $c_a = 1.00$  (bezrozměrný).



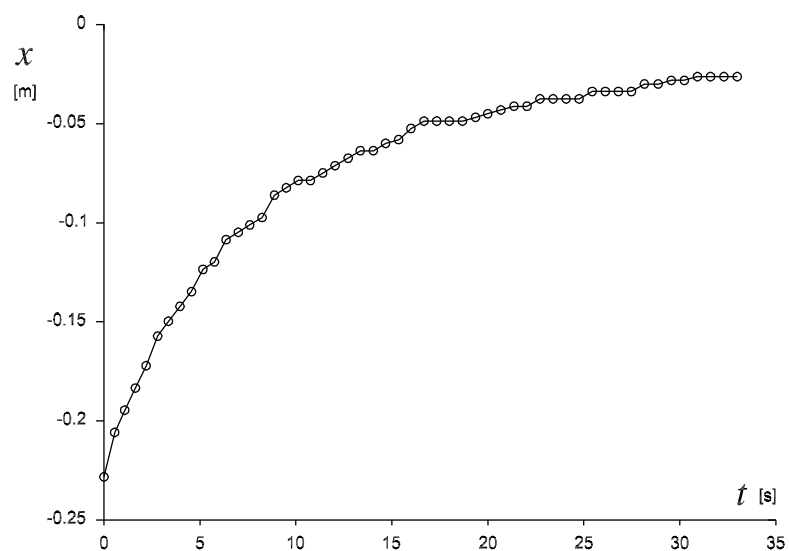
Obrázek 8.8: Naměřené amplitudy příčné výchylky  $y$  volného konce prutu při volném kmitání bez přidané hmoty



Obrázek 8.9: Naměřené nenulové amplitudy podélné výchylky  $x$  volného konce prutu při volném kmitání bez přidané hmoty



Obrázek 8.10: Naměřené amplitudy příčné výchylky  $y$  volného konce prutu při volném kmitání s přidanou hmotou

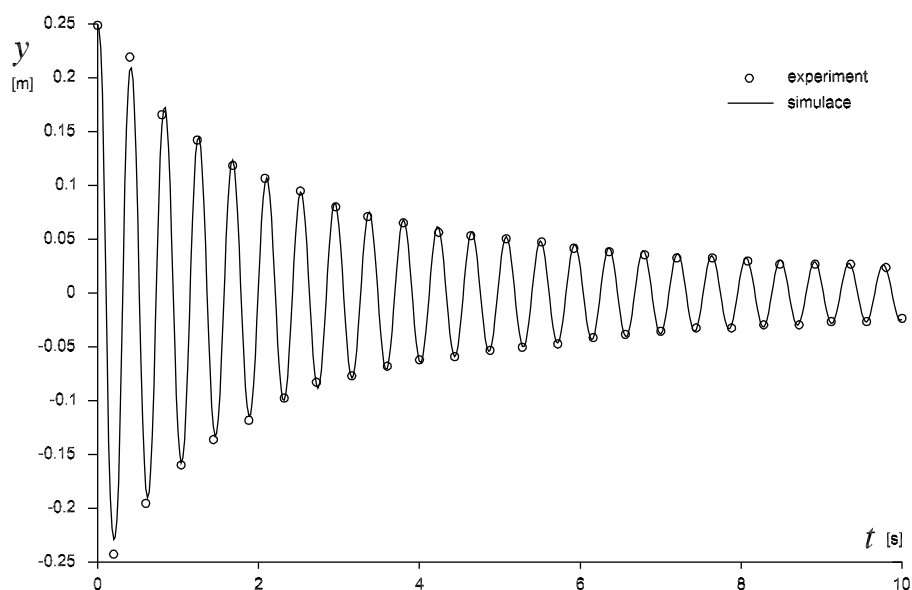


Obrázek 8.11: Naměřené nenulové amplitudy podélné výchylky  $x$  volného konce prutu při volném kmitání s přidanou hmotou

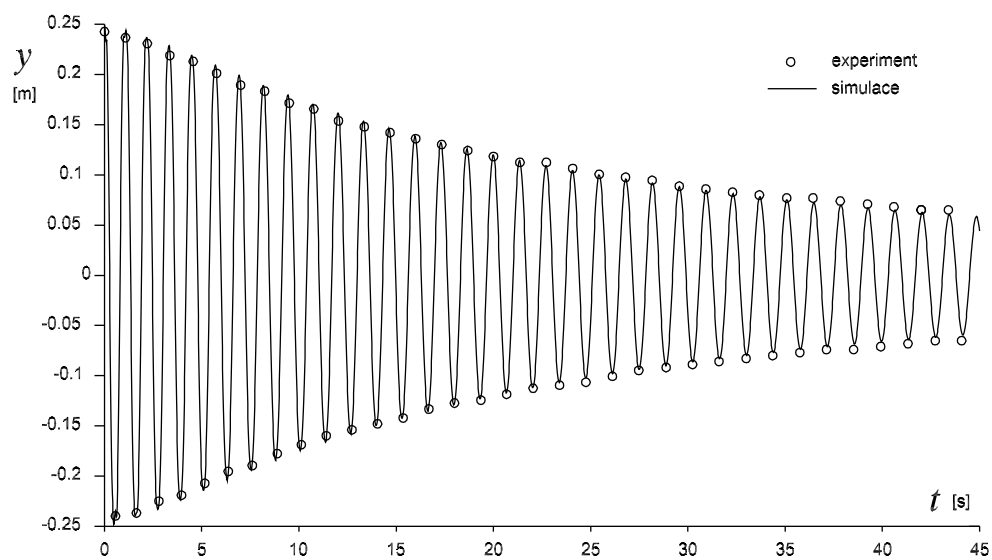
Srovnání průběhu numericky vypočtené příčné výchylky  $y$  volného konce prutu se stanovenými parametry útlumu s odpovídajícími naměřenými amplitudami je provedeno na obr. 8.12.

Při kmitání štíhlého nosníku zřejmě hraje důležitou roli velký odpor vzduchu (kvadratický člen). Tato hypotéza ovšem nebyla ověřována.

Srovnáním měření volného kmitání s přidanou hmotou a bez ní bylo zjištěno, že její přítomnost, pro dané přiblížení, neovlivňuje vlastnosti útlumu. Na obr. 8.13 je vidět dobrá výstižnost modelu pro volné kmitání s přidanou hmotou.



Obrázek 8.12: Srovnání vypočtených a naměřených amplitud příčné výchylky  $y$  volného konce prutu při volném kmitání bez přidané hmoty



Obrázek 8.13: Srovnání vypočtených a naměřených amplitud příčné výchylky  $y$  volného konce prutu při volném kmitání s přidanou hmotou

## 8.4 Dynamický experiment

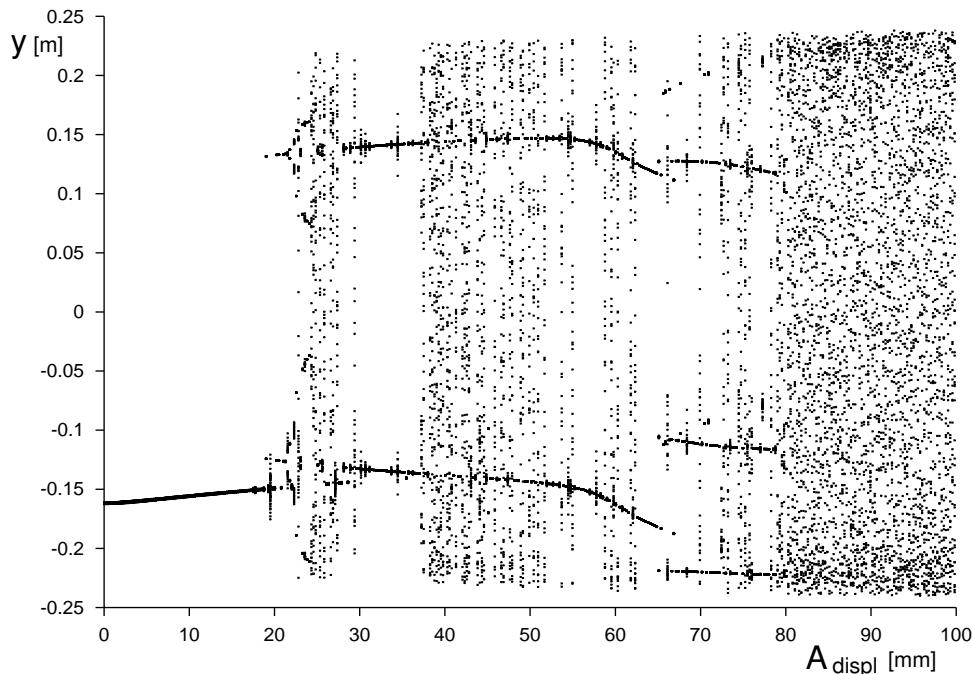
V předcházející kapitole 8.3 byly podrobně popsány podmínky zatěžování vybrané konstrukce dynamickým zatížením. Připomeňme, že svisle orientovaný vetknutý štíhlý prut s přidanou hmotou je zatěžován vertikálním harmonickým zrychlením s pevně danou frekvencí  $f_{load} = 0.5$  Hz a jediným nastavitelným parametrem – amplitudou posunutí  $A_{displ}$  bodu uložení prutu v rozsahu 0 až 100 mm.

Zatěžovací souprava bohužel nebyla konstruována tak, aby bylo možno měnit parametry zatěžování během experimentu. Pro změnu amplitudy posunutí pístu tedy bylo nutno zastavit a znovu spustit zatěžování.

Konstrukce a její okolí bylo zvlášť upraveno pro snímání videokamerami. Na obou koncích prutu byly umístěny reflexní snímací terčičky, viz příloha C. Další čtyři terčičky – referenční body – byly situovány do nepohyblivého okolí. Pro měření sloužily dvě videokamery, průmyslová černobílá se snímací frekvencí 10 Hz s rozlišením  $1291 \times 1029$  pixelů a komerční barevná SONY DCR se snímací frekvencí 25 Hz s rozlišením  $720 \times 576$  pixelů. Záznam z průmyslové kamery byl vyhodnocován speciálním geodetickým softwarem. Pro analýzu záznamu z komerční kamery byl užit autorem vyvinutý program.

### 8.4.1 Numerické simulace

Na obr. 8.14 je zobrazen bifurkační diagram získaný numerickou simulací experimentu. Pro každou změnu řídicího parametru (amplituda posunutí  $A_{displ}$ ) startoval systém ze stabilního statického stavu na straně imperfekce (záporné hodnoty  $y$ ) a ustaloval se 300 sekund.



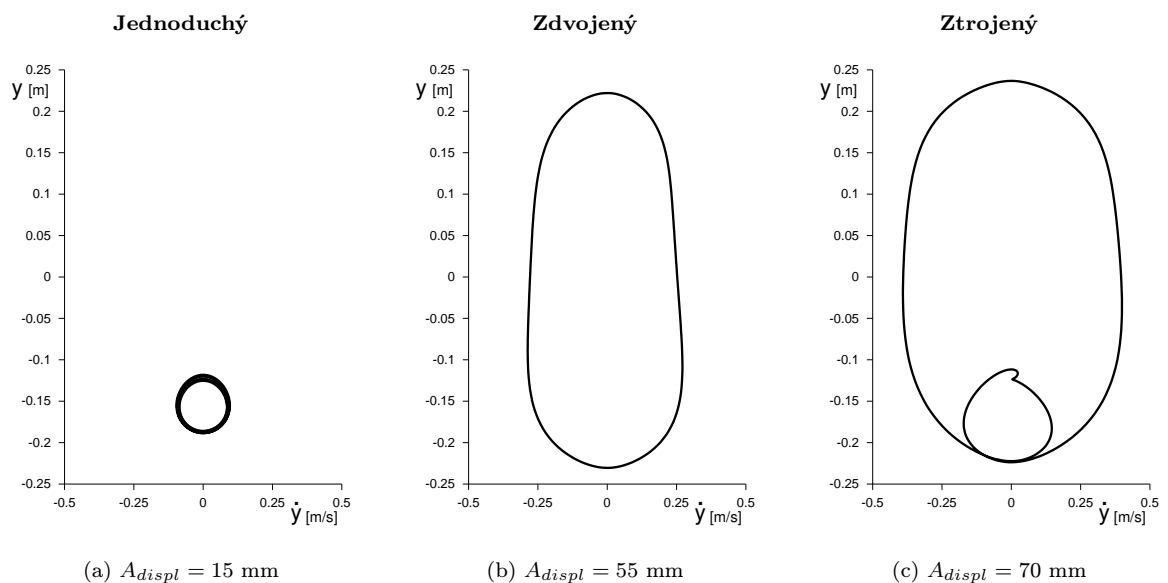
Obrázek 8.14: Bifurkační diagram získaný numerickým výpočtem – „pokaždé nový start“

Z bifurkačního diagramu na obr. 8.14 je patrné, že se sledovaný systém chová složitě.

Tento závěr lze učinit z přítomnosti raného chaotického chování (mnoho zdánlivě neuspořádaných bodů), nepřítomnosti kaskády bifurkací a současné existence více limitních množin. Příčinou je zřejmě pokritický stav prutu, který už od počátku vnesl do systému velmi silnou nelinearitu.

V bifurkačním diagramu lze nalézt některé limitní množiny jako uspořádané skupiny bodů. Význačné jsou zejména tři:

- jednoduchý limitní cyklus ( $A_{displ} = 0$  až 18 mm), viz obr. 8.15a, jenž reprezentuje kmitání v okolí stabilního statického stavu na straně imperfekce, z něhož systém startuje,
- jednoduchý limitní cyklus se zdvojenou periodou (např.  $A_{displ} = 55$  mm), viz obr. 8.15b, jenž reprezentuje kmitání prutu na obě strany s velmi velkou amplitudou (jedná se v podstatě o rezonanci kmitajícího prutu v pokritickém stavu),
- limitní cyklus s trojnásobnou periodou (např.  $A_{displ} = 70$  mm), viz obr. 8.15c, vzniklý zřejmě díky imperfekci prutu (pro symetrickou úlohu nebyl nalezen).



Obrázek 8.15: Projekce tří význačných limitních cyklů

Zobrazené projekce limitních cyklů lze vizuálním sledováním pohybu konstrukce velmi dobře rozpoznat, viz příloha D (video na přiloženém CD disku). Tohoto způsobu identifikace bylo užito pro vytvoření bifurkačního diagramu z reálného experimentu, viz kapitola 8.4.2.

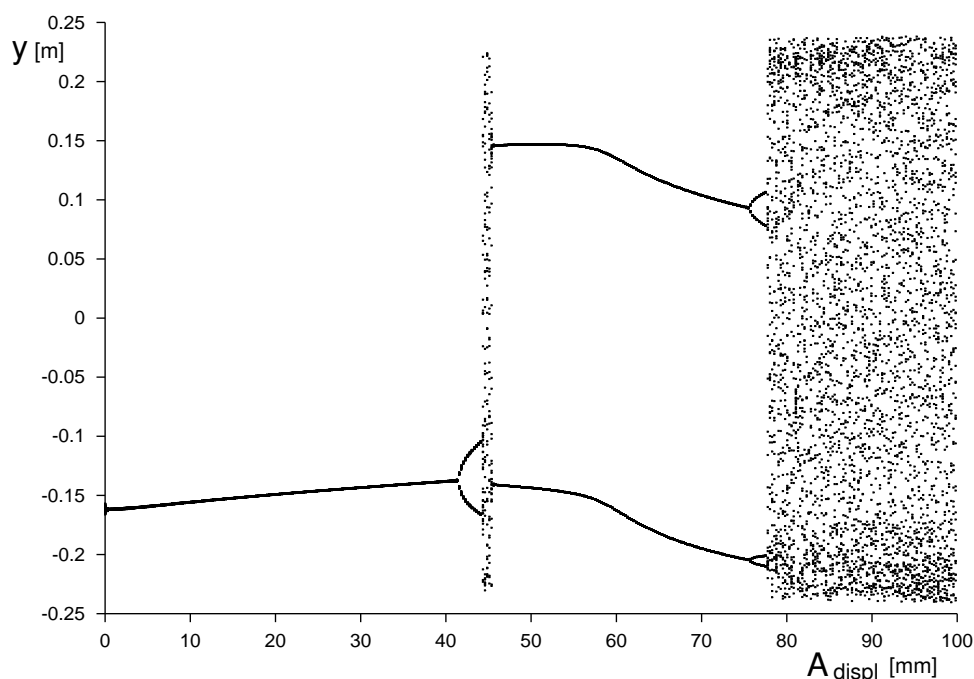
Na následujících obr. 8.16, 8.17 a 8.18 vidíme odpovídající bifurkační diagramy (stejný řídicí parametr, stejná stavová proměnná v Poincarého mapě, stejné rozsahy os) vypočtené při změně řídicího parametru „za chodu“ systému.

Obr. 8.16 reprezentuje diagram pro vzrůstající řídicí parametr. Obrázky 8.17, 8.18 odpovídají klesajícímu řídicímu parametru. Rozdílem mezi nimi jsou počáteční podmínky, které byly nastaveny tak, aby došlo k zachycení obou limitních cyklů (tj. zdvojeného a ztrojeného).

Na těchto bifurkačních diagramech jsou lépe patrné vývoje limitních množin. Můžeme vidět, že jednoduchý jednobodový limitní cyklus existuje až do bodu svého zdvojení přibližně  $A_{displ} = 41$  mm, viz obr. 8.16, což z bifurkačního diagramu „pokaždé nový start“, obr. 8.14, nebylo patrné.

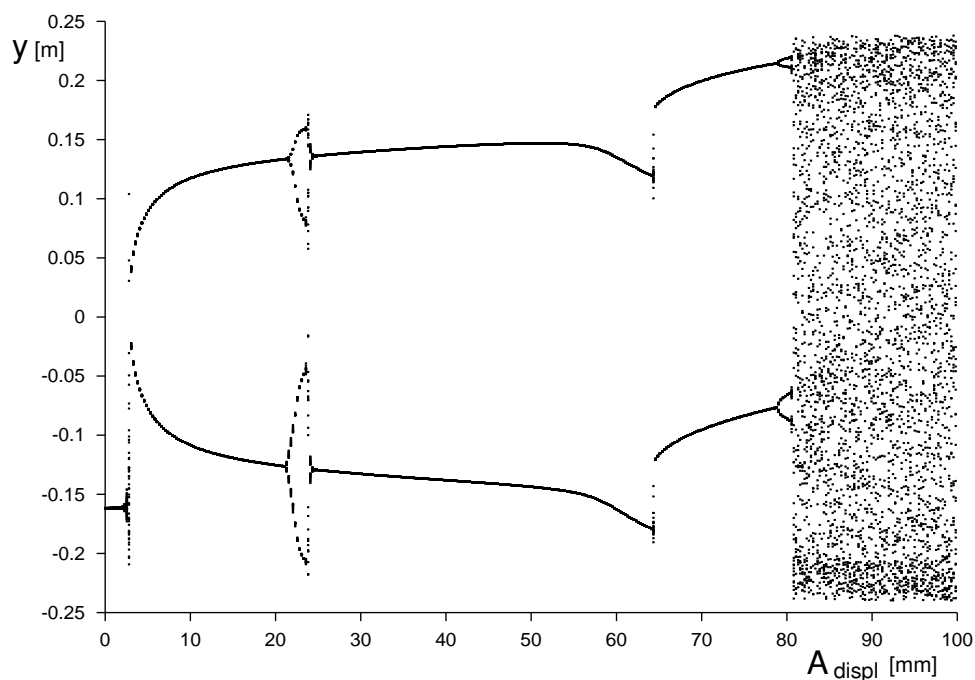
Na bifurkačních diagramech se sestupnou hodnotou řídicího parametru (obr. 8.17 a 8.18) je patrný vznik/zánik dvoubodového limitního cyklu v bifurkačním bodě přibližně  $A_{displ} = 3$  mm. Dále můžeme u tohoto limitního cyklu rozpoznat superkritickou vidličkovou bifurkaci s narušenou symetrií v bodě přibližně  $A_{displ} = 60$  mm.

U tříbodového limitního cyklu je dobře patrná kaskáda jeho zdvojení přibližně  $A_{displ} = 55$  až 62 mm, viz obr. 8.18.

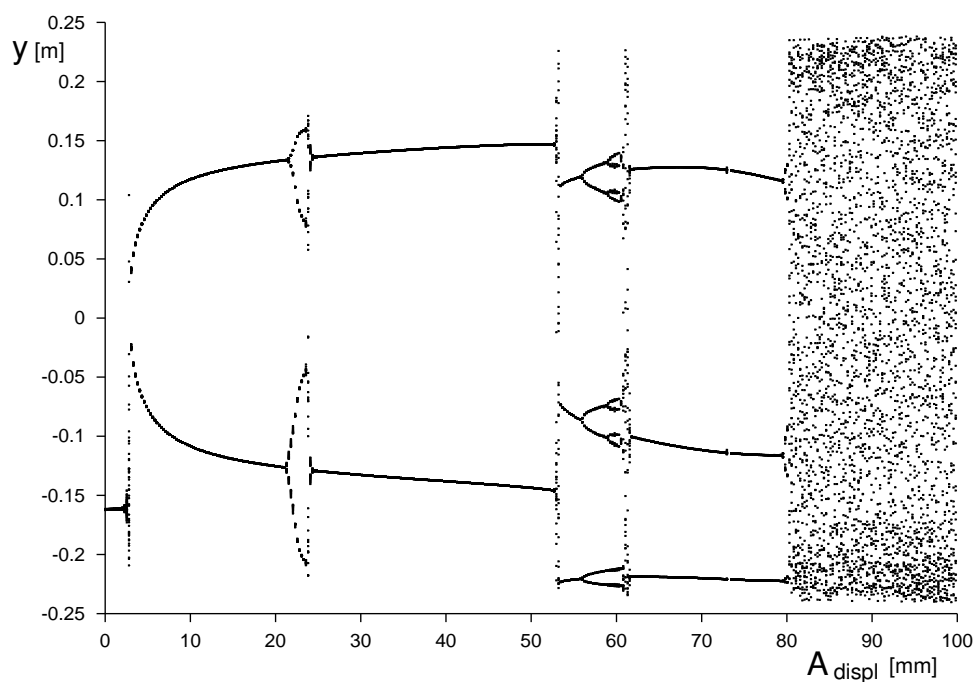


Obrázek 8.16: Bifurkační diagram z numerického výpočtu – plynulé zvyšování řídicího parametru





Obrázek 8.17: Bifurkační diagram z numerického výpočtu – plynulé snižování řídicího parametru



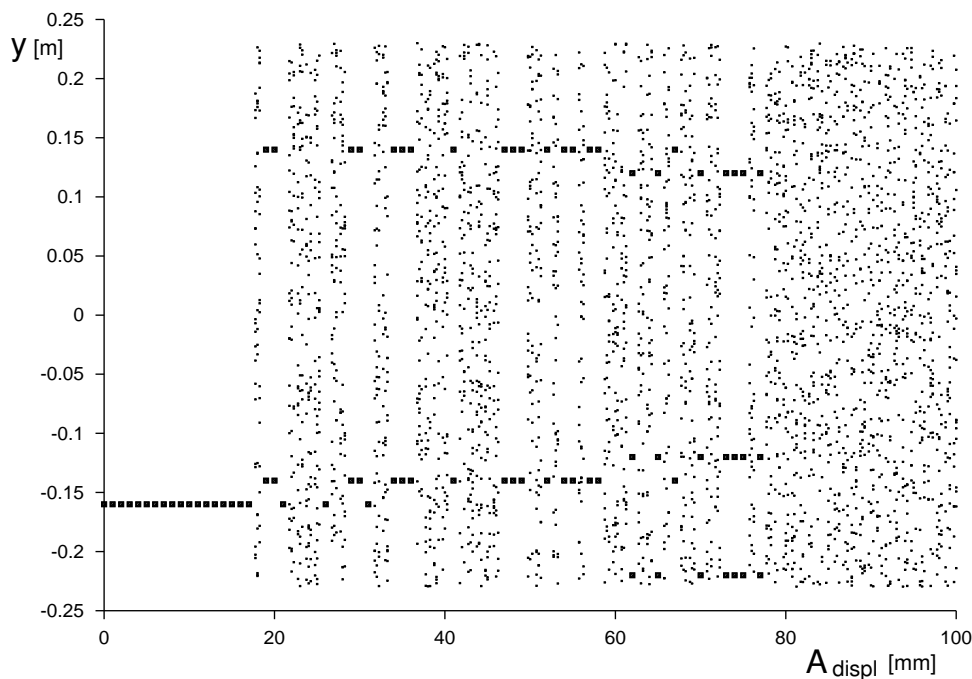
Obrázek 8.18: Bifurkační diagram z numerického výpočtu – plynulé snižování řídicího parametru s jinými počátečními podmínkami

### 8.4.2 Výsledky experimentu

Zvolená úloha je z technického hlediska velmi jednoduchá. Díky tomu byly dynamické experimenty s reálnou konstrukcí mnohokrát opakovány. Získaly se tak bohaté zkušenosti s odezvou konstrukce na zvolené počáteční podmínky a zvolené parametry zatěžování. Z experimentů byla patrná nestabilní přechodová oblast pohybu konstrukce – pro „stejně“ podmínky docházelo k ustalování pohybu konstrukce za různě dlouhou dobu a různým způsobem. Vše nasvědčovalo tomu, že se systém chová složitě.

Výhodou tohoto experimentu byla snadná vizuální identifikace stavu pohybu konstrukce. Jak je patrné z přílohy D (video na přiloženém CD disku), vybrané dominantní limitní cykly lze jednoduše rozpoznat. Tento fakt a náročnost získání dat<sup>9</sup> z měření videokamerami způsobil, že se organizování experimentu podřizovalo informacím získaným vizuálním pozorováním.

Identifikace limitní množiny sledováním „pouhým okem“ umožnila sestavení schematickeho „bifurkačního diagramu“ na obr. 8.19, které se podřizovalo nutnosti spouštět pro každou hodnotu řídicího parametru nový zatěžovací cyklus (srovnej s odpovídajícím bifurkačním diagramem na obr. 8.14).



Obrázek 8.19: Schematický bifurkační diagram z experimentu – pro každou hodnotu řídicího parametru nový start

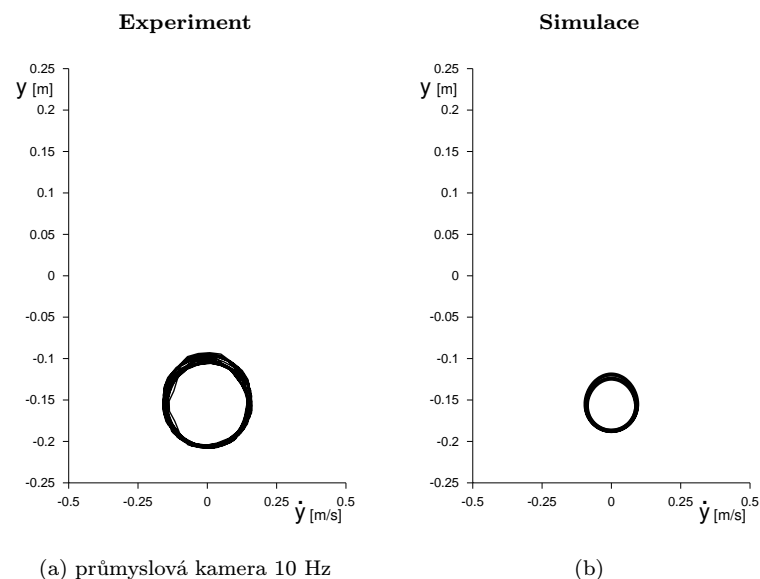
Srovnání bifurkačních diagramů z numerické simulace (obr. 8.14) a z experimentu (obr. 8.19) ukazuje reálnost a zachytitelnost chaotického chování. V tomto smyslu se vybraná konstrukce dobře osvědčila.

<sup>9</sup>Třiminutové měření videokamerou – běžná doba zatěžovacího cyklu – odpovídá analyzování více než 10 GB nekomprimovaných dat. Vybavení k analýze v reálném čase bohužel nebylo k dispozici.

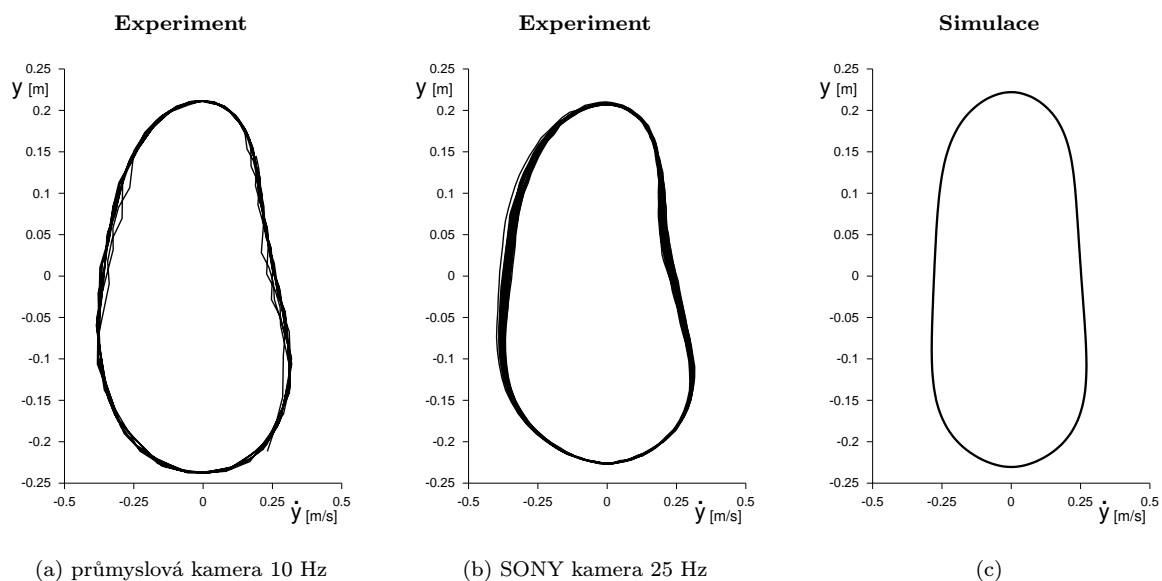
Z videozáznamů kmitání konstrukce byly obrazovou analýzou získány zejména časové řady příčné výchylky  $y$  volného konce prutu. Pro vykreslení projekcí limitních cyklů bylo ovšem zapotřebí znát také časové řady rychlostí příčné výchylky  $\dot{y}$ . Pro jejich získání byl vytvořen program, jenž odhaduje derivace časové řady příčné výchylky lokální – „klouzavou“ aproximací. Pro tuto aproximaci byl užit polynom druhého stupně, jímž se aproximovalo alternativně 7 po sobě jdoucích bodů ze záznamu s frekvencí 10 Hz a 9 bodů ze záznamu s frekvencí 25 Hz (odpovídá jednotlivým videokamerám).

Srovnání takto získaných projekcí limitních cyklů z experimentu s limitními cykly vypočtenými numericky uvádějí obr. 8.20, 8.21, 8.22 a 8.23. Zejména z projekcí na obr. 8.20 a 8.21 je patrné, že zaznamenávaný systém měl poněkud větší imperfekci než bylo změřeno. Může to být způsobeno praktickým provedením experimentů, jelikož samotný ocelový prut byl opakovaně upevňován a odstraňován, přičemž také zatěžovací zařízení měnilo svoji pozici.

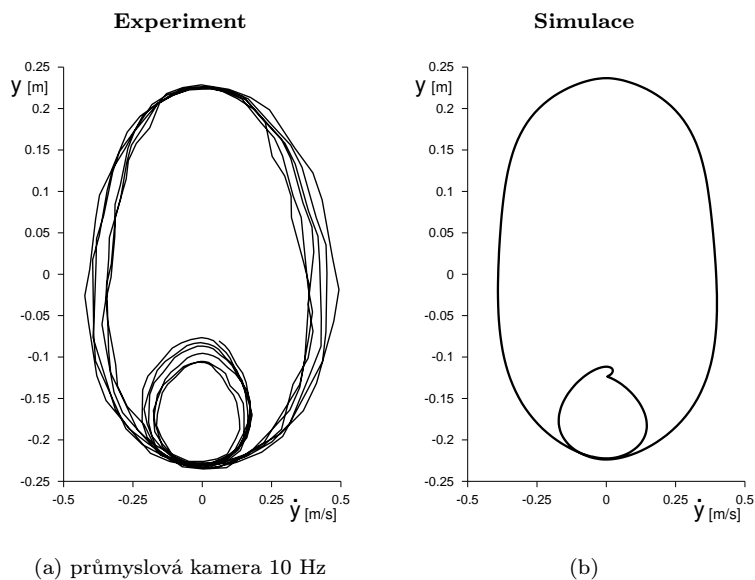
Ze srovnání projekcí limitních cyklů ze záznamů obou videokamer (např. obr. 8.21a a 8.21b) je vidět, že vyšší frekvence snímání byla značnou výhodou z hlediska přesnosti rekonstrukce derivace příčné výchylky prutu podle času.



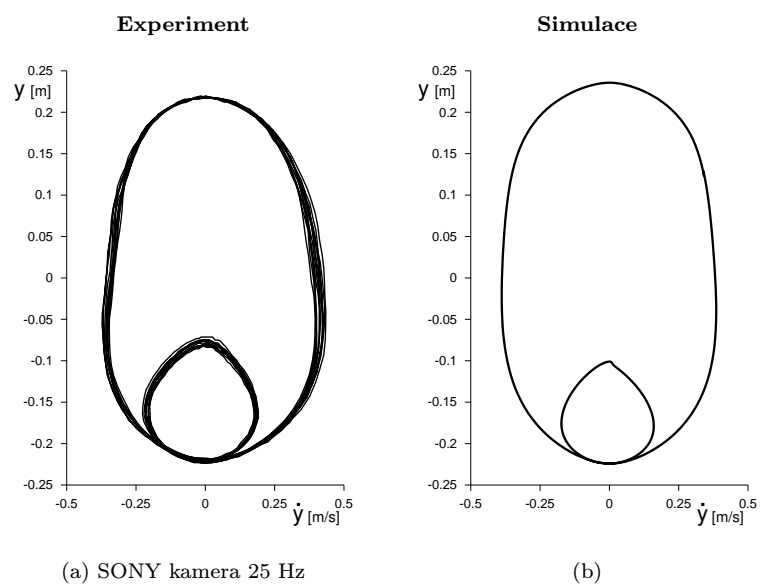
Obrázek 8.20: Srovnání projekce jednobodového limitního cyklu  $A_{displ} = 15$  mm získaného z experimentu a numerické simulace



Obrázek 8.21: Srovnání projekce zdvojeného limitního cyklu  $A_{displ} = 55$  mm získaného z experimentu a numerické simulace



Obrázek 8.22: Srovnání projekce ztrojeného limitního cyklu  $A_{displ} = 70$  mm získaného z experimentu a numerické simulace; technické zařízení neumožnilo zaznamenání lepšího ustálení



Obrázek 8.23: Srovnání projekce tříbodového limitního cyklu  $A_{displ} = 65$  mm získaného z experimentu a numerické simulace

# Kapitola 9

## Závěr

Předkládaná práce byla zaměřena na aplikaci nejnovějších poznatků o vlastnostech a možném chování široké třídy dynamických systémů, zejména však modelů mechanických konstrukcí. Bylo prokázáno, že nelineární projevy (např. zdvojení periody limitního cyklu či chaotické chování) systému, jenž může popisovat jednoduchou štíhlou konstrukci, jsou umožněny vnitřními vlastnostmi tohoto systému a nejsou způsobeny např. nepopsanými vnějšími vlivy, jak se dříve předpokládalo.

V úvodu práce byly přehledně rozděleny nelineární projevy deterministických systémů, tak jak jsou v současnosti známy, včetně vhodných metod pro jejich sledování a rozpoznávání. Bylo konstatováno, že klasické analytické nástroje, jako je např. spektrální analýza, jsou pro silně nelineární systémy nevhodné (nedokáží rozlišit šum a chaos).

Pro ověření reality poznatků získaných díky numerickému modelování systémů na počítači byl naplánován a proveden z hlediska požadovaných vlastností náročný dynamický experiment s pružnou štíhlou konstrukcí, která dosahovala velkých posunutí. Plánování tohoto experimentu a analýza získaných dat úzce souvisela se speciálním numerickým modelem konstrukce, vytvořeným pro tyto účely. Tento model byl v práci detailně popsán a odvozen.

Srovnání výsledků experimentu a numerických simulací tvoří nejvýznamnější část této práce. Navzdory složitosti chování systému bylo dosaženo dobré shody odezvy reálné konstrukce a jejího numerického modelu, což je dokumentováno zejména srovnáním bifurkačních diagramů a význačných limitních cyklů.

### 9.1 Přínosy

Tato práce vznikla v rámci výzkumného záměru MSM 261100009: „Netradiční metody studia komplexních a neurčitých systémů“, který patří k významným vědecko-výzkumným aktivitám na VUT v Brně od roku 1998. Přínosy této práce lze shrnout do následujících bodů:

- aplikace moderních teorií nelineárních dynamických systémů v oblasti mechaniky konstrukcí,
- ukázány klasifikační postupy a metody pro zařazení nelineárních jevů při vývoji konstrukcí,
- nalezena jednoduchá konstrukce s výraznými nelineárními projevy při užití běžných materiálů,

- navrženy a úspěšně vyzkoušeny experimentální postupy stanovení potřebných fyzikálně-mechanických charakteristik zvolené konstrukce,
- zjištěny vlastnosti útlumu vybrané konstrukce a nalezena jeho výstižná aproximace,
- vytvořen efektivní model zvolené konstrukce vhodný pro simulaci jejího chování,
- úspěšně proveden náročný experiment včetně verifikace vytvořeného modelu,
- nalezeny tři výrazné limitní cykly s odpovídajícím výskytem v experimentu i numerické simulaci,
- potvrzena možnost vzniku chaotického chování, jehož přítomnost byla předpovězena numerickými simulacemi.

## 9.2 Výhledy

Práce je výsledkem stále trvajících zájmu autora o téma nelinearit a netradičních přístupů nejen k problémům v teorii konstrukcí, viz např. [16], [19], [22], [23]. Do budoucna se plánují další experimenty se zaměřením na rozsáhlejší zmapování chování vybrané konstrukce, možnosti jejího řízení a optimalizace chování.

Aktuální je problematika analýzy chaotického chování a měření fraktální dimenze objektů, což je spjato s vývojem softwaru pro tyto účely, viz [18], [21].

Pozornost zasluhuje také význam imperfekcí v systémech a současný výskyt více statických stavů geometricky nelineárních modelů konstrukcí a hodnocení jejich stability, což souvisí s projekcemi energetických ploch, viz [20], [24].





# Přílohy

## Příloha A: Stabilita metod řešení pohybových rovnic

Pro posouzení vhodnosti vybraných numerických metod řešení daného disipativního dynamického systému byl pro zvolenou úlohu hledán maximální diskretizační krok  $h$  takový, při kterém se daná numerická metoda chová stabilně<sup>1</sup> vzhledem k vývoji celkové energie řešeného systému  $E_c$  v určených časech  $t$ . Hodnocení numerických metod je provedeno v závislosti na jejich reálné časové náročnosti a také vzhledem k jejich rychlosti konvergence k přesnému řešení.

### Řešený systém

Posudek stability numerických metod (popsaných podrobně v kapitole 5) byl proveden pro speciální model konzoly s parametry uvedenými (včetně jejich významu) v kapitole 7. Jako srovnávací úloha bylo řešeno volné kmitání prutu bez přidané hmoty s horizontální rovinnou ohybu (tj. bez vlivu gravitace) a nebyla užita ani síla nahrazující imperfekci (nemá v této úloze význam). Jako počáteční podmínka bylo vzato statické posunutí ve tvaru aproximujícím lineární pokles křivosti střednice prutu (kubická parabola) s příčnou výchylkou koncového bodu 0.421 mm. Tato úloha je zřejmě nejjednodušší možnou testovací úlohou a je jako taková zvolena.

Celková energie systému  $E_c$  je sledována ve třech časových okamžicích s exponenciálním nárůstem časových intervalů: 1.64, 16.4 a 164 sekund. Na obr. 10.1 je vidět průběh celkové energie řešeného systému v intervalu 16.4 sekund.

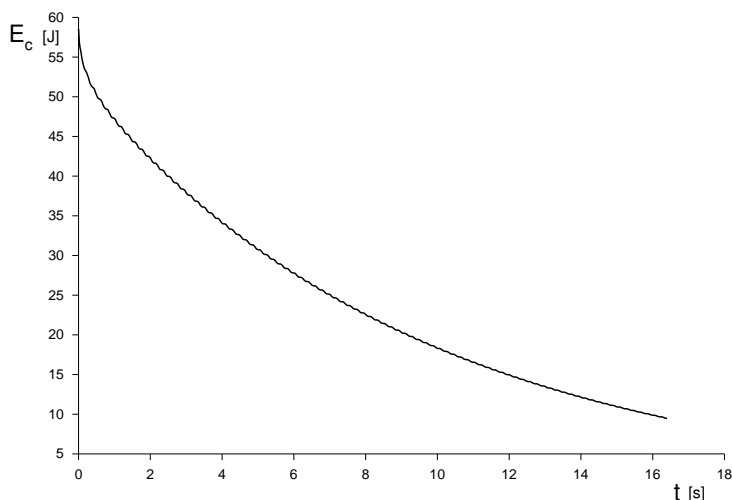
### Eulerova metoda

Eulerova metoda vykazuje pro řešený problém značnou míru nestability. Proti její upravené variantě (Upravená Eulerova metoda, viz dále) vyžaduje pro stabilní řešení 250krát menší krok a je tedy úměrně tomu časově náročnější. Navíc touto metodou vypočtené hodnoty celkové energie  $E_c$  velmi pomalu konvergují, viz tab. 10.1.

V tab. 10.1 jsou uvedeny hodnoty celkové energie  $E_c$  v různých časech v závislosti na kroku  $h$  metody. Zvýrazněny jsou hodnoty pro krok  $h$ , při kterém je metoda ještě stabilní. Z tabulky je patrné, že v daném čase není snadné rozhodnout, zdali je metoda stabilní

---

<sup>1</sup>Nestabilitu numerické metody lze zjednodušeně definovat takto: Přibližné řešení úlohy se chová nestabilně, když každá chyba při výpočtu nového stavu vnáší do hodnot tohoto stavu složku, jejíž vliv se zesiluje natolik, že pro dostatečně velký počet kroků vypočtené přibližné hodnoty zcela znehodnotí.



Obrázek 10.1: Vývoj celkové energie sledovaného systému

krok $h$	$t = 1.64$ s	$t = 16.4$ s	$t = 164$ s
0.000003	4.395	9.602	3.154
<b>0.000004</b>	<b>4.4</b>	<b>9.637</b>	<b>3.291</b>
0.000005	4.71	28.15	21570000
0.000006	12.5	114.7	přetečení
0.000007	30.5	271.5	přetečení
0.000008	53.9	497.8	přetečení
s	$10^{-8}$ J	$10^{-9}$ J	$10^{-15}$ J

Tabulka 10.1: Vývoj celkové energie v daných časech vzhledem ke kroku Eulerovy metody

(snadno rozeznatelná destabilizace metody probíhá pomalu). Nejvýraznějším projevem nestability je *přetečení*<sup>2</sup>.

### Klasická Runge-Kuttova metoda

Klasická Runge-Kuttova metoda je již pro řešený problém vyhovující. Vzhledem k Upravené Eulerově metodě je sice časově náročnější (asi 3krát), ale její konvergence je značně lepší. Svou roli zde pochopitelně hraje také teoretická spolehlivost metody. Ze zkoumaných metod je metodou s nejvyšší mírou stability, ale s nejvyššími nároky na implementaci metody, jak je patrné z přílohy B. Vzhledem k Upravené Eulerově metodě povoluje pro řešenou úlohu asi 1.4krát větší krok  $h$ . Z tab. 10.2 je patrné, že touto metodou vypočtené hodnoty celkové energie  $E_c$  velmi rychle konvergují.

Obdobně jako u předchozí tabulky jsou zvýrazněny hodnoty pro krok  $h$ , při kterém je metoda ještě stabilní. Z tabulky je patrný velmi výrazný projev okamžiku nestability

<sup>2</sup>Přetečením myslíme stav v počítači, kdy výsledek nějaké číselné operace je číslo, které svojí velikostí přesahuje zvolený limit pro velikost očekávaného čísla (nelze jej uložit ve zvolené bitové reprezentaci čísla).

krok $h$	$t = 1.64$ s	$t = 16.4$ s	$t = 164$ s
0.0011	4.387	9.488	2.772
0.0012	4.387	9.488	2.772
0.0013	4.387	9.489	2.773
<b>0.0014</b>	<b>4.388</b>	<b>9.489</b>	<b>2.773</b>
0.0015	13800	15900	$1.4 \times 10^{10}$
0.0016	přetečení	přetečení	přetečení
s	$10^{-8}$ J	$10^{-9}$ J	$10^{-15}$ J

Tabulka 10.2: Vývoj celkové energie v daných časech vzhledem ke kroku R-K metody

metody. I v krátkém čase lze v průběhu simulace rozhodnout o její nestabilitě, což u předchozí Eulerovy metody bylo obtížné.

### Upravená Eulerova metoda

Tato „metoda“ vzniklá jednoduchou úpravou Eulerovy metody má oproti ní značně lepší vlastnosti vzhledem k řešenému problému. V tomto případě lze dokonce říci, že se svou stabilitou téměř vyrovná Runge-Kuttově metodě. Konvergence této metody je sice mírně horší než R-K metody, ale časová náročnost je pro maximální stabilní krok asi 3krát nižší. U této metody je ovšem problém s teoretickou spolehlivostí. V tab. 10.3 jsou opět uvedeny vypočtené hodnoty celkové energie  $E_c$ .

krok $h$	$t = 1.64$ s	$t = 16.4$ s	$t = 164$ s
0.0006	4.385	9.492	2.782
0.0007	4.385	9.493	2.784
0.0008	4.385	9.494	2.786
0.0009	4.385	9.496	2.788
<b>0.001</b>	<b>4.384</b>	<b>9.494</b>	<b>2.773</b>
0.0011	přetečení	přetečení	přetečení
s	$10^{-8}$ J	$10^{-9}$ J	$10^{-15}$ J

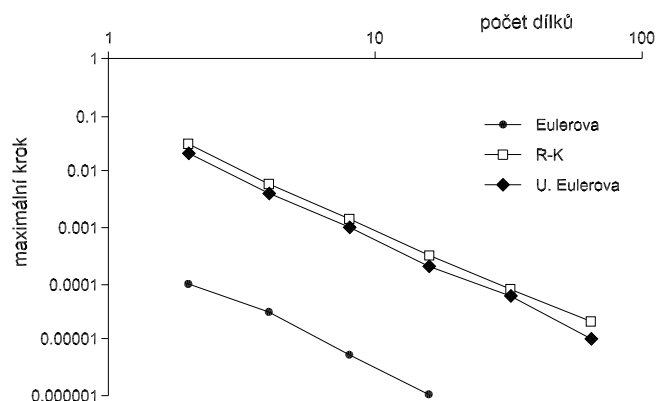
Tabulka 10.3: Vývoj celkové energie v daných časech vzhledem ke kroku Upravené Eulerovy metody

Také zde jsou zvýrazněny hodnoty pro krok  $h$ , při kterém je metoda ještě stabilní. Rovněž pro tuto metodu platí, že je možno po velmi krátkém čase v průběhu simulace rozhodnout o její nestabilitě.

### Srovnání metod

Srovnáme si tři posuzované metody z hlediska závislosti na počtu segmentů užitého modelu při kroku  $h$ , pro který jsou metody ještě stabilní (označme  $h_{max}$ ). Tato závislost (maximální krok  $h_{max}$  na počtu segmentů) je zobrazena v logaritmickém měřítku na obr. 10.2.

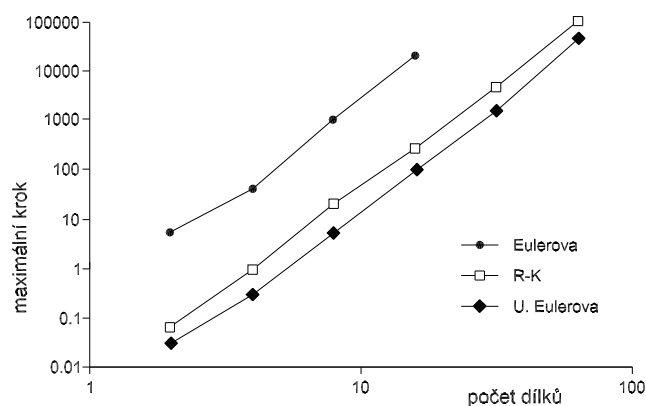
Z obr. 10.2 je patrné, že metoda Klasická Runge-Kuttova je nejstabilnější z posuzovaných metod, přičemž ji těsně následuje Upravená Eulerova metoda. Naproti tomu samotná Eule-



Obrázek 10.2: Graf srovnání závislosti maximálního kroku metod na počtu segmentů modelu v logaritmickém měřítku

rova metoda je téměř o tři řády méně stabilní (pro řešený dynamický systém), než metoda Runge-Kuttova i její upravená varianta.

Časová náročnost řešení při maximálním kroku  $h_{max}$  dává, díky menší výpočetní náročnosti Eulerovy metody, poněkud jiný výsledek, viz obr. 10.3.



Obrázek 10.3: Graf srovnání závislosti maximálního kroku metod na počtu segmentů modelu v logaritmickém měřítku

Na obr. 10.3 lze vidět, že nejméně časově náročnou metodou při maximálním kroku  $h_{max}$  je Upravená Eulerova metoda. Klasická R-K metoda je asi 3krát náročnější a samotná Eulerova metoda asi 300krát náročnější.

V závěru uvedme srovnání přesnosti dosažených hodnot celkové energie  $E_c$  při maximálním kroku  $h_{max}$ . Z tabulek 10.1, 10.2 a 10.3 je patrné, že při maximálním kroku je chyba nalezených hodnot celkové energie  $E_c$  kupříkladu v čase  $t = 164$  sekund výrazně ve prospěch Runge-Kuttovy metody, viz tab. 10.4.

---

<b>Eulerova metoda</b>	<b>R-K metoda</b>	<b>U. Eulerova metoda</b>
14%	0.072%	0.61%

Tabulka 10.4: Srovnání relativní chyby celkové energie  $E_c$  v čase  $t = 164$  s pro maximální krok  $h_{max}$ 

### Vlastnosti Upravené Eulerovy metody

Výhody a nevýhody užití Upravené Eulerovy metody pro řešení vybrané úlohy vzhledem k metodě Klasické R-K lze shrnout následovně:

+

rychlost výpočtu (úspora 1/3 času),  
jednoduchá implementace (viz příloha B),  
transparentní výpočet,

–

empirický původ (teoretická nespolehlivost),  
pomalejší konvergence,  
neobecná aplikovatelnost.

## Příloha B: Implementace řešení dynamického systému

Pro simulace modelu konzoly byly s ohledem na různé užití vybrány dva programovací jazyky. Pro dlouhodobé výpočty vyžadující maximální rychlost a pro datové výstupy byl zvolen jazyk C překládaný kompilátorem DJGPP [13]. Pro *realtime*<sup>3</sup> sledování vývoje systému, jeho přímé řízení a přenositelnost programu byl vybrán jazyk Java s kompilátorem JDK (Java Development Kit) [55].

### Implementace numerických metod

Následující zdrojové kódy ukazují implementace numerických metod v jazyce C. Proměnné `fid[]`, `omd[]` a `fad` symbolizují stavové proměnné systému  $\varphi$ ,  $\omega$  a  $\theta$ , proměnná `hd` je diskretizační krok  $h$ . Proměnné `msd[]` reprezentují matici momentů setrvačnosti  $(\mathbf{M} + \mathbf{M}_a)$  včetně vektoru pravých stran  $((\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_a)\omega^2 - \mathbf{K}\varphi - \mathbf{C}\omega + \mathbf{F} + \mathbf{A})$ . Proměnné `ksd[]` zastupují neznámá úhlová zrychlení  $\dot{\omega}$  – řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (SLAR) – dané soustavou `msd[]`. Proměnná `nl` je počet dílců modelu.

### Eulerova metoda

Především z implementace této metody je patrné, jak jednoduché může být numerické řešení nelineárních dynamických úloh. Jedinou složitější operací je řešení SLAR, reprezentované funkcí `slarGCP()`. Poznamenejme, že v případě užití modelu dle metody tuhých dílců (viz kapitola 6.2) by i tato operace odpadla.

```

//*****
//spocita nový stav Eulerovou metodou
void stepE()
{
    long il;
    //
    //
    //*****
    //reseni soustavy
    //
    nulovani();
    //
    dosazM();
    dosazK();
    dosazQ();
    dosazF();
    dosazA();
    dosazC();
    //
    //reseni SLAR
    slarGCP(msd,ksd,nl);
    //
    //
    //*****
    //vypocet premisteni
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        fid[il]+=hd*omd[il];
    }
}

```

<sup>3</sup>Sledování v reálném čase. Výpočet probíhá současně se zobrazením vývoje systému s dostatečnou rychlostí.

```

//
//
//*****
//vypocet rychlosti
for(il=0;il<nl;il++)
{
    omd[il]+=hd*ksd[il];
}
//
//
//*****
//vypocet faze
fapd=fad;
fad+=hd*zomd;
//
//
//**
//cas
timed+=hd;
}

```

### Klasická Runge-Kuttova metoda

Vzhledem k tomu, že je R-K metoda čtyřbodová, musí se v rámci jednoho kroku čtyřikrát sestavovat a řešit SLAR (funkce `getaccel()`), což z tohoto hlediska významně znevýhodňuje tuto metodu. Časová náročnost metody, vzhledem k ostatním, je uvedena v příloze A.

```

//*****
//metody pridruzene k RK metode
//*****
//ulozi stavove promenne do pomocneho pole
void sethpole()
{
    long il;
    //
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        hfid[il]=fid[il];
        homd[il]=omd[il];
    }
}

//*****
//vraci reseni soustavy pro zrychleni
void getaccel()
{
    nulovani();
    //
    dosazM();
    dosazK();
    dosazQ();
    dosazF();
    dosazA();
    dosazC();
    //
    //reseni SLAR
    slarGCP(msd,ksd,nl);
}

//*****

```

```
//spocita nový stav Runge-Kuttovou metodou
void stepRK()
{
    long il;
    //
    //
    //duplikuje stavové proměnné
    sethpole();
    //
    //
    //*****
    //výpočet členů k1
    //
    //výpočet k1fi
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        k1fid[il]=omd[il];
    }
    //
    //resení zrychlení
    getaccel();
    //
    //výpočet k1om
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        k1omd[il]=ksd[il];
    }
    //
    //
    //*****
    //výpočet členů k2
    //
    //
    //přepočítání vstupu pro člen k2 (tj. xi(t)+k1i*h/2)
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        fid[il]+=hd/2*k1fid[il];
        omd[il]+=hd/2*k1omd[il];
    }
    //
    //
    //výpočet k2fi
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        k2fid[il]=omd[il];
    }
    //
    //resení zrychlení
    getaccel();
    //
    //výpočet k2om
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        k2omd[il]=ksd[il];
    }
    //
    //
    //*****
    //výpočet členů k3
    //
    //
    //přepočítání vstupu pro člen k3 (tj. xi(t)+k2i*h/2)
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        fid[il]=hfid[il]+hd/2*k2fid[il];
    }
}
```



```
    omd[il]=homd[il]+hd/2*k2omd[il];
}
//
//
//vypocet k3fi
for(il=0;il<nl;il++)
{
    k3fid[il]=omd[il];
}
//
//reseni zrychleni
getaccel();
//
//vypocet k3om
for(il=0;il<nl;il++)
{
    k3omd[il]=ksd[il];
}
//
//
//*****
//vypocet clen k4
//
//
//prepcet vstupu pro clen k4 (tj. xi(t)+k3i*h)
for(il=0;il<nl;il++)
{
    fid[il]=hfid[il]+hd*k3fid[il];
    omd[il]=homd[il]+hd*k3omd[il];
}
//
//
//vypocet k4fi
for(il=0;il<nl;il++)
{
    k4fid[il]=omd[il];
}
//
//reseni zrychleni
getaccel();
//
//vypocet k4om
for(il=0;il<nl;il++)
{
    k4omd[il]=ksd[il];
}
//
//
//
//*****
//vypocet noveho stavu
for(il=0;il<nl;il++)
{
    fid[il]=hfid[il]+hd/6*(k1fid[il]+2*k2fid[il]+2*k3fid[il]+k4fid[il]);
    omd[il]=homd[il]+hd/6*(k1omd[il]+2*k2omd[il]+2*k3omd[il]+k4omd[il]);
}
//
//
//*****
//vypocet faze
fapd=fad;
fad+=hd*zomd;
//
//
//***
```

```
    //cas
    timed+=hd;
}
```

## Upravená Eulerova metoda

Jediným rozdílem mezi implementací této metody a metody Eulerovy je záměna pořadí výpočtu vektoru posunutí `fid[]` a vektoru rychlostí `omd[]`.

```
//*****
//spocita novy stav Upravenou Eulerovou metodou
void stepUE()
{
    long il;
    //
    //
    //*****
    //reseni soustavy
    //
    nulovani();
    //
    dosazM();
    dosazK();
    dosazQ();
    dosazF();
    dosazA();
    dosazC();
    //
    //reseni SLAR
    slarGCP(msd,ksd,nl);
    //
    //
    //*****
    //vypocet rychlosti
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        omd[il]+=hd*ksd[il];
    }
    //
    //
    //*****
    //vypocet premisteni
    for(il=0;il<nl;il++)
    {
        fid[il]+=hd*omd[il];
    }
    //
    //
    //*****
    //vypocet faze
    fapd=fad;
    fad+=hd*zomd;
    //
    //
    //***
    //cas
    timed+=hd;
}
```

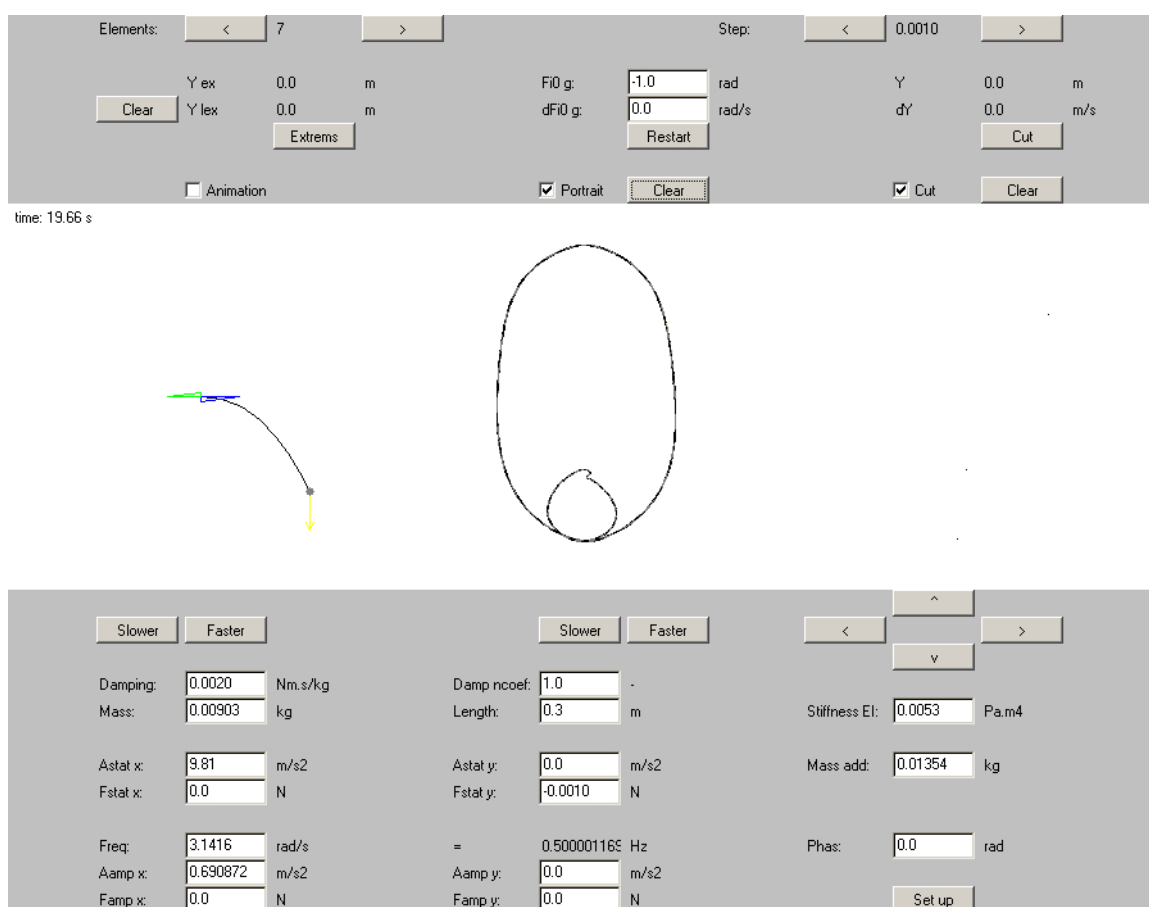
## Java applet

Na internetu je k dispozici na adrese

<http://www.fce.vutbr.cz/STM/frantik.p/applets/dynkonz/simul.htm>

interaktivní simulace užitého numerického modelu štíhlého konzolového nosníku. Pro tuto implementaci byla užita Upravená Eulerova metoda, viz kapitola 5.3.

Ačkoliv je simulace přednastavena, je možno její průběh i start změnit editací vstupních polí a užitím zobrazených tlačítek, viz obr. 10.4. Popišme postupně zleva-doprava a shora-dolů všechny vstupní objekty (dle obr. 10.4).



Obrázek 10.4: Grafické uživatelské rozhraní appletu pro vstupy a výstupy numerické simulace

Dvojice tlačítek s šipkami s popisem **Elements** umožňuje změnit počet segmentů modelu prutu s tím, že simulace bude po každém stisku tlačítka restartována (nelze pokračovat v započaté simulaci při tak zásadní změně modelu).

Dvojice tlačítek s šipkami s popisem **Step** okamžitě po stisku nastaví diskretizační krok Upravené Eulerovy metody, přičemž je třeba vzít na vědomí možnost ztráty stability řešení (v případě destabilizace lze simulaci obnovit snížením diskretizačního kroku a restartováním

simulace tlačítkem **Restart**).

Pole s návěstími **Yex** a **Ylex** zobrazuje extrémy příčné výchylky  $y$  volného konce prutu po stisknutí tlačítka **Extrems**. Návěstí **Yex** označuje globální extrém pro celou dobu simulace. Návěstí **Ylex** označuje lokální extrém dosažený v simulaci po stisku tlačítka **Clear**, které způsobí jeho okamžité vymazání.

Pole s návěstími **Fi0g** a **dFi0g** umožňují zadat počáteční podmínky simulace. Vstupní pole označené **Fi0g** zadává počáteční pootočení volného konce prutu (prut má pro jednoduhost tvar kružnicového oblouku) a pole **dFi0g** počáteční úhlovou rychlost, která bude udělena všem dílcům. Tlačítko **Restart** aplikuje tyto počáteční podmínky, tj. odstartuje novou simulaci.

Pole s návěstími **Y** a **dY** vypisuje souřadnice posledního dosaženého bodu v Poincarého mapě po stisknutí tlačítka **Cut**.

Velké zobrazovací pole se zaškrťovacími políčky **Animation**, **Portrait** a **Cut** slouží pro zobrazení chování systému. Každé z těchto políček povoluje nebo zakazuje vykreslování příslušného zobrazení. První zobrazení **Animation** ukazuje animaci kmitajícího prutu včetně symbolů zatížení, přidané hmoty a času. Druhé zobrazení **Portrait** je projekce trajektorie systému, jak byla užita v kapitole 8 (rovina  $\dot{y}, y$ ). Třetí zobrazení **Cut** ukazuje Poincarého mapu ve stejné rovině jako předchozí zobrazení. Tlačítka **Clear** mažou příslušné zobrazovací roviny pro sledování ustalování systému. Dvojice tlačítek **Slower** a **Faster** zpomaluje resp. urychluje zobrazení systému. Čtveřice tlačítek s šipkami umožňuje změnu rozsahů souřadnicových os zobrazení **Portrait** a **Cut**.

Velké vstupní pole ve spodní části panelu apletu umožňuje zadávat parametry modelu prutu, které se po zadání aplikují okamžitě stiskem tlačítka **Set up**. V první části panelu lze měnit parametry prutu. Vstupní pole **Damping**, **Damp ncoef**, **Mass**, **Length** a **Stiffness EI** určují koeficient tlumení  $c$ , kvadratický koeficient  $c_a$ , hmotnost prutu  $m_c$ , délku prutu  $l_c$  a ohybovou tuhost prutu  $EI$ . V druhé části panelu lze zadat současně různé statické zatížení. Návěstí **Astat x**, **Astat y**, **Mass add**, **Fstat x** a **Fstat y** reprezentují statické zrychlení v ose  $x$  (zde horizontální) resp. v ose  $y$  (tj. zde vertikální), setrvačnou hmotnost  $m_a$  přidané hmoty a zatížení statickou konzervativní silou na volném konci prutu ve směru osy  $x$  resp. ve směru osy  $y$ . Poslední část přísluší dynamickému zatížení. Návěstí **Freq**, **Phas**, umožňují zadat frekvenci zatížení  $\Omega$  a fázový úhel  $\theta_0$ , vstupní pole **Aamp x**, **Aamp y**, **Famp x** a **Famp y**, odpovídají amplitudám zrychlení a sil ve směru osy  $x$  resp. ve směru osy  $y$ .

## Vlastnosti jazyka Java

Jazyk Java, který vznikl z jazyka C, má proti němu následující výhody a nevýhody:

+

- přenositelnost programu na různé platformy,
- snadné vytvoření grafického uživatelského rozhraní,
- možnost vytvoření apletů (internetová aplikace),
- vysoká úroveň ochrany chybných operací,

–

- nižší rychlost,
- náročnost jazyka,
- absence některých funkcí.

## **Příloha C: Fotodokumentace**

Pro internetovou verzi není příloha C dostupná.

## **Příloha D: Videodokumentace**

Pro internetovou verzi není příloha D dostupná.

# Literatura

- [1] Al-Qaisia A. A., Hamdan M. N., Bifurcations and chaos of an immersed cantilever beam in a fluid and carrying an intermediate mass, *Journal of Sound and Vibration* 253(4), p. 859-888, 2002
- [2] Ario I., Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss, *International Journal of Non-linear Mechanics* 39, p. 605-617, 2004
- [3] Arnold V. I., *Teória katastrof* (orig. *Teorija katastrof*, vydavateľstvo Moskevské univerzity 1983), vydavateľstvo Alfa, Bratislava 1986
- [4] Barrow J. D., *Teorie všeho – Hledání nejhlubšího vysvětlení* (orig. *Theories of Everything. The Quest for Ultimate Explanation*), nakladatelství Mladá fronta (orig. Oxford University Press, 1991), edice Kolumbus, svazek 133, Praha 1999
- [5] Bažant Z. P., Cedolin L., *Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford University Press, New York 1991
- [6] Bragg F. R. S., Nye J. F., Dynamický model krystalové struktury, překlad článku z *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol 190, str. 474-481, září 1947
- [7] Brepta R., Půst L., Turek F., *Mechanické kmitání*, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha 1994
- [8] Brousil J., Slavík J., Zeman V., *Dynamika*, nakladatelství SNTL, Praha 1989
- [9] Cacka P., *Fraktální vlastnosti lomových ploch cementových kompozitů*, diplomová práce, Ústav stavební mechaniky FAST VUT v Brně, Brno 2000
- [10] Cacka P., *Vícekritériální genetické algoritmy*, diplomová práce, Ústav automatizace a informatiky FSI VUT v Brně, Brno 2003
- [11] Coveney P., Highfield R., *Mezi chaosem a řádem* (orig. *Frontiers of Complexity*), nakladatelství Mladá fronta (orig. Faber and Faber, London 1995), edice Kolumbus, Praha 2003
- [12] Dalík J., *Matematika, Numerické metody*, skriptá, nakladatelství VUT Brno, Brno 1992
- [13] <http://www.delorie.com/djgpp/>
- [14] Dwivedy S. K., Kar R. C., Non-linear dynamics of a slender beam carrying a lumped mass under principal parametric resonance with three-mode interactions, *International Journal of Non-linear Mechanics* 36, p. 927-945, 2001

- [15] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M., Feynmanovy přednášky z fyziky, nakladatelství FRAGMENT (orig. Addison Wesley Longman, Inc., CalTech 1964), Havlíčkův Brod 2000
- [16] Frantík P., Generování náhodných čísel s uplatněním teorie chaosu, 3. odborný seminář doktorského studia, FAST VUT v Brně, Brno, únor 2001
- [17] Frantík P., Jednostupňový model vzpěru prutu, uveřejněno na internetu na adrese: <http://kitnarfovo.misto.cz/pub/2002.02.onefreed/onefreed.htm>, únor 2002
- [18] Frantík P., Keršner Z., Macur J., Estimation of fractal dimension: optimised box-counting method, International symposium Non-Traditional Cement & Concrete, BUT, Brno, June 2002
- [19] Frantík P., Dynamický jednostupňový model vzpěru prutu: Chaotické chování, seminář Modelování v mechanice 2003, VŠB-TU Ostrava, leden 2003
- [20] Frantík P., Nelineární řešení průhybu konzoly II, 5. odborná konference doktorského studia, VUT FAST v Brně, Brno, únor 2003
- [21] Frantík P., Zbyněk Keršner, Miroslav Stibor, Optimised box-counting method: Effect of mesh size distribution, Contributions to Computational and Experimental Investigation of Engineering Materials and Structures, CTU Reports 1/2003 Volume 7, March 2003
- [22] Frantík P., Tvar atraktoru v chaotickém režimu, národní konference Inženýrská mechanika 2003, Svratka, květen 2003
- [23] Frantík P., Nesrovnalosti v popisu příčné kontrakce, seminář Problémy lomové mechaniky III, ÚFM AV ČR a ÚSM FAST VUT v Brně, Brno, červen 2003
- [24] Frantík P., Stability Study of the Elastic Loop, 5th International PhD Symposium in Civil Engineering, Delft Juni 2004, Netherlands
- [25] Savi M. A., Pacheco P. M. C. L., Braga A. M. B., Chaos in a shape memory two-bar truss, International Journal of Non-linear Mechanics 37, p. 1387-1395, 2002
- [26] Gleick J., Chaos: Vznik nové vědy (orig. Chaos: Making a New Science, 1987), nakladatelství Ando Publishing, Brno 1996
- [27] Greene B. R., Elegantní vesmír (orig. The Elegant Universe), nakladatelství Mladá fronta (orig. W. W. Norton & Company, Inc., New York 1999), edice Kolumbus, svazek 156, Praha 2001
- [28] Grygar J., Vesmír, jaký je, Současná kosmologie /téměř/ pro každého, nakladatelství Mladá fronta, edice Kolumbus, svazek 135, Praha 1997
- [29] Hallquist J. O., LS-DYNA theoretical manual ([http://www.dynamore.de/download/manual/lis-dyna\\_theory\\_manual.pdf](http://www.dynamore.de/download/manual/lis-dyna_theory_manual.pdf)), Livermore Software Technology Corporation, Livermore 1998, California USA
- [30] Hellman H., Velké spory na poli vědy (orig. Great Feuds in Science), nakladatelství HEL (orig. Jon Wiley & Sons, Inc.), Ostrava 2000

- [31] Henrych J. Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje, studie ČSAV 6.85, nakladatelství Akademia, Praha 1985
- [32] Hillis W. D., Vzor v kameni, Jednoduché myšlenky, které řídí počítače (orig. The Pattern on the Stone, Basic Books, New York 1998), nakladatelství Akademia, Praha 2003
- [33] Jensen J. S., Buckling of an elastic beam with added high-frequency excitation, International Journal of Non-linear Mechanics 35, p. 217-227, 2000
- [34] Horák J., Krlín L., Raidl A., Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace, nakladatelství Akademia, Praha 2003
- [35] Kapitaniak T., Chaos for Engineers, Theory, Applications, and Control, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1998
- [36] Kolář I., Úvod do Thomovy teorie katastrof, nakladatelství Akademia, Praha 1988
- [37] Kolář V., Chyby ve výpočtech konstrukcí, Projekční a konstrukční pomůcky, Česká matice technická, VUT v Brně, ročník 1995, číslo spisu 445, Brno a Ostrava 1995
- [38] Kosmatka J. B., An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded timoshenko beams, Journal Computers & Structures, Vol. 57, No. 1, p. 141-149, 1995
- [39] Leech J. W., Klasická mechanika, nakladatelství SNTL (orig. Butler & Tanner Ltd., Frome, 1958), Praha 1970
- [40] Macur J., Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace, nakladatelství PC-DIR s. r. o., Brno 1995
- [41] Macur J., Analýza časových řad, prezentace na komorním semináři Nelineární jevy v dopravním proudu, UAI FAST VUT v Brně, Brno 2004
- [42] Main I. G., Kmity a vlny ve fyzice, nakladatelství Akademia Praha, Brno 1990
- [43] Mathiasson K., Axially and transversally loaded cantilever beam, internal report 79:10, Department of Structural Mechanics, Göteborg University, Göteborg 1979, Germany
- [44] Brdička M., Samek L., Sopko B., Mechanika kontinua, nakladatelství Akademia, Praha 2000
- [45] Novotný J., osobní konzultace, Brno 2003
- [46] Nosek J. (editor), Chaos, věda a filosofie, sborník příspěvků, Filosofie – nakladatelství filosofického ústavu AV ČR, Praha 1999
- [47] Pirner M., Fisher O., Identifikace změn v konstrukci s použitím dynamické zkoušky, sborník konference DYN-WIND 2003 (Proceedings of the 2nd International Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering), str. 26-29, Tale 2003, Slovensko



- [48] Peterka F., Tondl A., Subharmonic motion of the Oscillator with Soft Impacts, národní konference Inženýrská mechanika 2002 (CD příloha), Svratka 2002
- [49] Rzanicin A. R., Ustojcivost ravnovesia uprugich sistem, Gosudarstvennoje izdatelstvo tehniko-teoreticeskoj literatury, Moskow 1955
- [50] Rossi R., Numerical couplet analysis of flexible structures subjected to the fluid action, 5th International PhD Symposium in Civil Engineering, Delft Juni 2004, Netherlands
- [51] Smullyan R., Navěky nerozhodnuto (Úvod do logiky a zábavný průvodce ke Gödelovým objevům), (orig. Forever Undecided (A Puzzle Guide to Gödel)), A Borzoi Book, Alfred A. Knopf, Inc., New York 1987), nakladatelství Academia, Praha 2003
- [52] Šmilauer V., Bittnar Z., Hydratace cementové pasty a model CEMHYD3D, článek v časopisu Beton 6/2003, str. 32-35
- [53] Šmiřák S., Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, doplňkový učební text pro distanční studium, STM FAST VUT v Brně, Brno 1998
- [54] Štěcha J., Havlena V., Teorie dynamických systémů, skriptá, nakladatelství ČVUT, Praha 1999
- [55] <http://java.sun.com/downloads/index.html>
- [56] Timoshenko S., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company Inc., New York and London 1936
- [57] Vaněček A., Čelikovský S., Novým paradigmatickým deterministického chaosu jsou jeho kladné vlastnosti, příspěvek sborníku Chaos, věda a filosofie, Filosofia – nakladatelství filosofického ústavu AV ČR, Praha 1999
- [58] Wilson J. F., Callis E. G., The dynamics of loosely jointed structures, International Journal of Non-linear Mechanics 39, p. 503-514, 2004
- [59] Yagasaki K., Homoclinic and heteroclinic behavior in an infinite-degree-of-freedom Hamiltonian system: Chaotic free vibrations of an undamped, buckled beam, Physics Letters A 285, nakladatelství Elsevier, 2001
- [60] Zabel V., Applications of Wavelet Analysis in System Identification, ISM-Bericht 1/2003, Bauhaus-Universität Weimar, Germany

# Autor



Jméno: **Petr Frantík**  
E-mail: [kitnarf@centrum.cz](mailto:kitnarf@centrum.cz)  
Www: <http://kitnarf.webpark.cz/index.htm>

## Odborné zaměření

Statická a dynamická stabilita štíhlých konstrukcí. Netradiční přístupy, aplikace teorie dynamických systémů a teorie chaosu pro analýzu konstrukcí. Vytváření modelů konstrukcí a numerických metod včetně jejich programové implementace. Vývoj numerických metod pro měření fraktální dimenze.

# Publikační činnost

Frantík P., Chování silně nelineárních stavebních konstrukcí, diplomová práce, STM FAST VUT v Brně, Brno, červen 2000

Frantík P., Numerical solution of non-linear dynamic oscillator, 3RE Workshop Weimar/Brno, FAST VUT v Brně, Brno, October

Frantík P., Sledování a simulace nelineární dynamické konstrukce, 3. odborný seminář doktorského studia, FAST VUT v Brně, Brno, únor 2001, ISSN 1212-9275

Frantík P., Generování náhodných čísel s uplatněním teorie chaosu, 3. odborný seminář doktorského studia, FAST VUT v Brně, Brno, únor 2001, ISSN 1212-9275

Frantík P., Problematika stanovení fraktální dimenze lomové plochy, seminář Problémy lomové mechaniky, ÚSM FAST VUT v Brně a ÚFM AV ČR, Brno, červen 2001, ISBN 80-214-1906-7

Frantík P., Diskrétní řešení vzpěru prutu, seminář Problémy modelování, VŠB-TU Ostrava, Ostrava, leden 2002, ISBN 80-214-2017-0

Frantík P., Nelineární řešení průhybu konzoly, 4. odborný seminář doktorského studia, VUT FAST v brně, Brno, únor 2002, ISBN 80-214-2067-7

Frantík P., Jednostupňový model vzpěru prutu, uveřejněno na internetu na adrese: <http://kitnarfovo.misto.cz/pub/2002.02.onefreed/onefreed.htm>, únor 2002

Frantík P., Nestability vybraných systémů, konference Inženýrská mechanika, Svratka, květen 2002, ISBN 80-214-2109-6

Frantík P., Rozšířené klasické řešení vzpěru nedokonalého prutu: oblasti přitažlivosti Newtonovy metody, národní konference Inženýrská mechanika 2002, Svratka, květen 2002 a VII. Vedecká konferencia s medzinárodnou účasťou, TU v Košiciach, Košice - Medzev, máj 2002

Frantík P., Netradiční řešení vzpěru prutu, VII. Vedecká konferencia s medzinárodnou účasťou, TU v Košiciach, Košice - Medzev, máj 2002, ISBN 80-7099-815-6

Frantík P., Keršner Z., Macur J., Estimation of fractal dimension: optimised box-counting method, International symposium Non-Traditional Cement & Concrete, BUT, Brno, June 2002, ISBN 80-214-2130-4

- Frantík P., Macur J., Měření fraktální dimenze lomové plochy, seminář Problémy lomové mechaniky II, ÚFM AV ČR a ÚSM FAST VUT v Brně, Brno, červen 2002, ISBN 80-214-2129-0
- Frantík P., Prut v oblastech velkých deformací: Řešení experimentu, IV. konferencia se zahraničnou účastou: staticko-konstrukčné a stavebno fyzikálne problémy stavebných konstrukcií, TU Košice, Tatranská Lomnica, listopad 2002, ISBN 80-232-0211-1
- Frantík P., Řešení vzpěradla, uveřejněné na internetu na adrese: <http://kitnarfovo.misto.cz/pub/2003.01.vzperadlo/vzperadlo.htm>, leden 2003
- Frantík P., Dynamický jednostupňový model vzpěru prutu: Chaotické chování, seminář Modelování v mechanice 2003, VŠB-TU Ostrava, leden 2003, ISBN 80-248-0253-8
- Frantík P., Jednostupňový model vzpěradla: Zpřesnění pokritického řešení, seminář Modelování v mechanice 2003, VŠB-TU Ostrava, leden 2003, ISBN 80-248-0253-8
- Frantík P., Nesymetrické pokritické řešení vzpěradla, seminář Modelování v mechanice 2003, VŠB-TU Ostrava, leden 2003, ISBN 80-248-0253-8
- Frantík P., Nelineární řešení průhybu konzoly II, 5. odborná konference doktorského studia, VUT FAST v Brně, Brno, únor 2003, ISBN 80-7204-265-3
- Frantík P., Zbyněk Keršner, Miroslav Stibor, Optimised box-counting method: Effect of mesh size distribution, Contributions to Computational and Experimental Investigation of Engineering Materials and Structures, CTU Reports 1/2003 Volume 7, March 2003, ISBN 80-01-02734-1
- Frantík P., Tvar atraktoru v chaotickém režimu, národní konference Inženýrská mechanika 2003, Svratka, květen 2003, ISBN 80-86246-18-3
- Frantík P., Jiří Macur, Diskrétní dynamický model konzoly: Speciální řešení, konference DYN-WIND, TU Žilina, Tále, květen 2003, ISBN 80-8070-066-4
- Frantík P., Nesrovnalosti v popisu příčné kontrakce, seminář Problémy lomové mechaniky III, ÚFM AV ČR a ÚSM FAST VUT v Brně, Brno, červen 2003, ISBN 80-214-2392-7
- Frantík P., Barevné stupnice, uveřejněné na internetu na adrese: <http://kitnarf.webpark.cz/2003.07.stupnice/stupnice.htm>, červenec 2003
- Frantík P., Volkmar Zabel, Dynamical systems stability, paper for the studies in interest groups under 11th European Summer Academy, Bauhaus University Weimar, August 2003
- Frantík P., Jiří Macur, Special Fast Discrete Dynamic Model of Slender Cantilever Beam, Abstract in Book of Abstracts, 2nd PhD Workshop BRNO - WEIMAR - PRAGUE - WIEN(BOKU), FCE BUT, Brno, November 2003, ISBN 80-214-2506-7
- Frantík P., Rozbor existence řešení dokonalého symetrického vzpěradla, mezinárodní konference Modelování v mechanice 2004, VŠB-TU Ostrava, leden 2004, ISBN 80-248-0546-4

Frantík P., Spojitá aproximace prutu při ztrátě stability od vlastní tíhy, mezinárodní konference Modelování v mechanice 2004, VŠB-TU Ostrava, leden 2004, ISBN 80-248-0546-4

Frantík P., Nelineární řešení průhybu konzoly III, 6. odborná konference doktorského studia JUNIORSTAV 2004, VUT FAST v Brně, Brno, únor 2004, ISBN 80-214-2560-1

Frantík P., Frequency Analysis Of Free Vibrations Of The Beam In Postcritical State, národní konference Inženýrská mechanika 2004, Svratka, květen 2004, ISBN 80-85918-88-9

Frantík P., Stability Study of the Elastic Loop, 5th International PhD Symposium in Civil Engineering, Delft Juni 2004, Netherlands, ISBN 90-5809-676-9

Frantík P., Kmitání štíhlého nosníku: Útlum a jeho model, 42. mezinárodní konference Experimentální analýza napětí, Kašperské hory, červen 2004, ISBN 80-239-2964-X

Frantík P., Jednoduchý model lomu trámce, seminář Problémy lomové mechaniky IV, ÚFM AV ČR a STM FAST VUT v Brně, Brno, červen 2004, ISBN 80-214-2585-7