# DAMAGE IDENTIFICATION OF DYNAMICALLY LOADED STRUCTURES: METHODOLOGY AND MODAL PROPERTIES STUDY

**D. Lehký*, D. Novák*, P. Frantík***

**Summary:** *The paper is focused on damage identification of dynamically loaded structures using methods of soft computing including artificial intelligence. The damage and variability of material properties (stiffness) along the structure is studied. The identification method based on coupling of artificial neural networks and stochastic analysis of structure for preparation of appropriate training set is used. Sensitivity analysis of the input parameters is the integral part of the method. The proposed methodology is extended towards the dynamic response of structures when results of modal analysis are the input parameters (frequencies, mode shapes). As a particular step an influence of local decrease of stiffness on modal properties (eigenfrequencies and modeshapes) is studied. The role of the magnitude of damage is examined. The aim is determination of suitable initial parameters for consequent inverse analysis.*

## 1. Úvod

V mostním inženýrství se v souvislosti s údržbou mostů a stanovením jejich životnosti instalují rozsáhlé monitorovací systémy. S jejich pomocí je získávána dynamická odezva konstrukce ve formě časových řad (zrychlení, rychlosti apod.). Z nich bývají následně stanoveny tzv. modální vlastnosti (vlastní tvary a jim odpovídající vlastní frekvence), tlumící charakteristiky a v případě znalosti referenčního stavu také srovnávací kritéria MAC, FRAC, COMAC (viz např. Pirner, 2003). Snahou odborníků je využití takto získaných informací z odezvy konstrukce pro lokalizaci poškození a následné stanovení zbytkové životnosti. Předpokládá se, že lokální poškození konstrukce se projeví změnou výše zmíněných parametrů. Porovnáním s neporušeným stavem lze poté zpětně detekovat místa porušení. Uvedený postup spadá do oblasti pokročilého nedestruktivního testování.

Pro lokalizaci poškození konstrukce se v současnosti nejčastěji využívá postupu zvaného *model updating method* (Huth a kol., 2005, Fang a kol., 2005, Teughels & De Roeck., 2004, Link, 1999, Wenzel & Pichler, 2005). Při tomto postupu se jednotlivé neznámé parametry modelu (tuhosti) iterativně nastavují tak, aby se minimalizoval rozdíl mezi experimentálními

* Ing. David Lehký, Ph.D., Prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc., Ing. Petr Frantík, Ph.D.: Ústav stavební mechaniky; Fakulta stavební; Vysoké učení technické v Brně; Veveří 95; 602 00 Brno; tel.: +420.541 147 376, fax: +420.541 240 994; e-mail: lehky.d@fce.vutbr.cz

a numericky získanými daty, přičemž se často bere v potaz citlivost jednotlivých parametrů na celkovou odezvu konstrukce (Strauss a kol., 2004). Cílem příspěvku je popis alternativní metodiky pro identifikaci poškození, která je založena na využití umělých neuronových sítí v kombinaci se stochastickou analýzou. Práce navazuje na téma identifikace parametrů materiálových modelů pomocí umělých neuronových sítí (Lehký, 2006, Novák & Lehký, 2006) a rozšiřuje stávající metodiku směrem k dynamicky namáhaným konstrukcím. Příklad aplikace je uveden v závěru příspěvku.

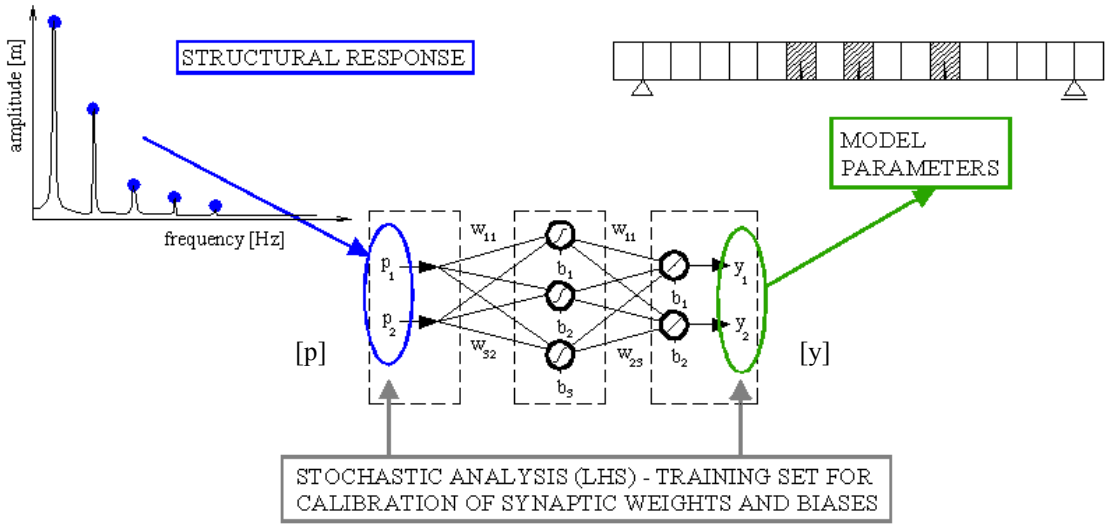
## 2. Metodika inverzní analýzy

Navržená metodika pro identifikaci poškození dynamicky namáhaných konstrukcí je založena na kombinaci umělých neuronových sítí a stochastické analýzy s využitím účinné simulační metody Latin Hypercube Sampling (LHS). Ta slouží pro vytvoření vhodné učící množiny pro neuronovou síť za použití nízkého počtu simulací. Celý postup identifikace je následující:

1) Vytvoření odpovídajícího MKP výpočtového modelu a nastavení jeho parametrů tak, aby výsledky modelu byly v souladu s experimentálním měřením. V případě identifikace poškození dynamicky namáhaných konstrukcí jsou identifikovanými parametry (IP) hodnoty tuhostí (ohybová, torzní) měnící se podél konstrukce. Často lze uvažovat změnu modulu pružnosti. Tzv. měřenými daty (MD), které jsou výstupem experimentu i numerické simulace a slouží jako vstup této inverzní analýzy, jsou modální parametry konstrukce (vlastní frekvence, vlastní tvary apod.).
2) IP modelu jsou dále uvažovány jako náhodné veličiny popsané matematickým modelem rozdělení pravděpodobnosti; rovnoměrné rozdělení představuje přirozenou volbu, neboť dolní a horní mez tohoto rozdělení může představovat hranice reálného výskytu daného parametru. Nicméně jiná rozdělení pravděpodobnosti je možno rovněž použít, např. normální, chceme-li potlačit extrémy parametrů a naopak zdůraznit oblast výskytu s největší pravděpodobností. IP modelu se nasimulují pomocí vhodné simulace typu Monte Carlo (LHS). Výsledkem jsou náhodné realizace IP (vektor $\mathbf{y}$, viz obrázek 1)**.** Je možné uvažovat i statistickou závislost mezi IP.
3) S náhodnými realizacemi IP $\mathbf{y}$ se provede opakované řešení MKP výpočtového modelu a získá se statistický soubor virtuální odezvy $\mathbf{p}$ (viz obrázek 1).
4) Náhodné realizace $\mathbf{y}$ (výstup neuronové sítě) a získaná náhodná odezva z MKP modelu $\mathbf{p}$ (vstup neuronové sítě) slouží jako učící množina pro učení vhodné neuronové sítě. Tento důležitý prvek celého postupu je ilustrativně znázorněn na obrázku 1 (zde pro výstup výpočtového modelu ve formě vlastních frekvencí).
5) Jakmile je neuronová síť naučena, pak lze na jejím základě zodpovědět klíčovou otázku: Určit nejlépe soubor IP tak aby MKP model poskytl co nejlepší shodu s MD. To se provede simulací neuronové sítě s experimentálně získanými MD jako jejím vstupem. Výsledkem je soubor parametrů $\mathbf{y}_{opt}$.
6) Závěrečná verifikace výsledků postupu představuje MKP výpočet s parametry $\mathbf{y}_{opt}$ a srovnání numerických a experimentálních MD.

Problematika inverzní analýzy a identifikace poškození je součástí projektu SARA. Podrobný popis metod a softwarových prostředků je možné najít např. v práci Bergmeister a kol. (2007). Zmiňme zde pouze stručně metody a prostředky, které jsou relevantní pro zde popisovanou identifikaci založenou na umělých neuronových sítích. Základními metodami

jsou: stratifikovaná simulační metoda typu Monte Carlo zvaná Latin Hypercube Sampling (McKay a kol., 1979), citlivostní analýza založená na neparametrické pořadové korelaci (Iman & Conover, 1980), umělé neuronové sítě – klasická dopředná síť typu vícevrstvý perceptron (např. Cichocki & Unbehauen, 1993). Pro účely inverzní analýzy je vyvíjen víceúčelový software, který je založen na integraci statistického, citlivostního a spolehlivostního softwaru FReET (Novák a kol., 2007) a nástroje pro práci s neuronovými sítěmi DLNNET (Lehký, 2007). Pro dynamickou analýzu byl použit MKP software SOFiSTiK (SOFiSTiK AG, 2004).




Obrázek 1 Schéma inverzní analýzy pro identifikaci poškození

## 3. Studie vlivu modálních vlastností

Velmi důležitou součástí vývoje metodiky pro identifikaci poškození dynamicky namáhaných konstrukcí je i studie významu modálních vlastností pro následnou inverzní analýzu. Za tímto účelem byla provedena studie vlastních frekvencí a vlastních tvarů na jednoduchém konzolovém nosníku konstantního průřezu; dále pak na mostní konstrukci Z24 ve Švýcarsku, která je dále použita i pro samotnou identifikaci poškození v kapitole 4.

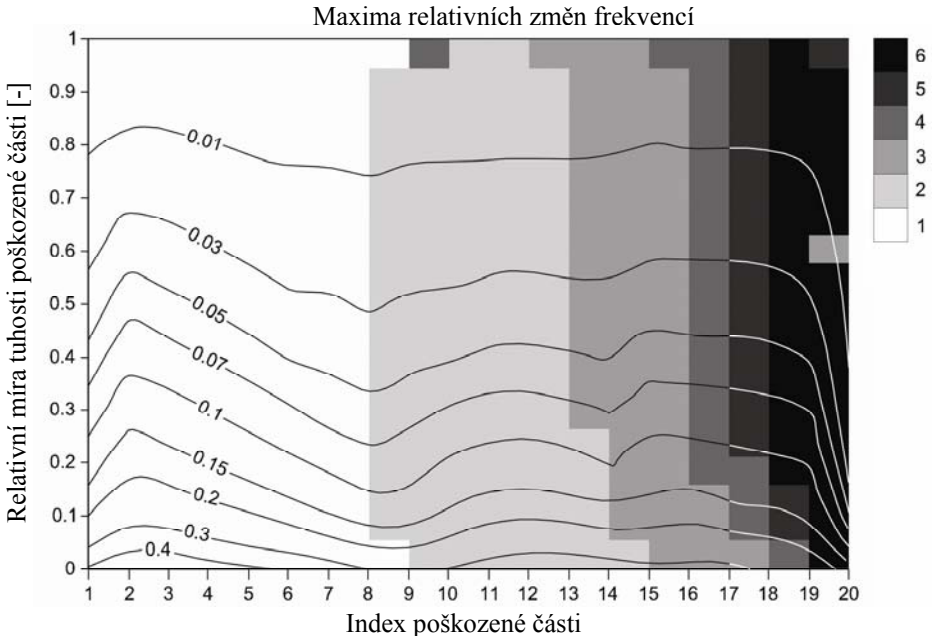
### 3.1. Konzolový nosník

Volba konzolového nosníku byla ovlivněna předpokladem plánovaného vlastního experimentálního měření, existencí analytického řešení a nesymetrií prvku (na rozdíl např. od prostého nosníku). Symetrické prvky mají symetrické a antimetrické vlastní tvary, což způsobuje nejednoznačnost identifikace poškození. Cílem studie bylo zjistit, které vlastní frekvence a vlastní tvary jsou ovlivněny změnou tuhosti v určitém místě na nosníku. Tato informace je důležitým vodítkem pro budoucí inverzní analýzu. Poznamenejme, že získávání vlastních frekvencí a tvarů (zejména těch vyšších) z experimentálního měření není triviální záležitostí a nese s sebou celou řadu problémů. Pro účely studie bylo použito prvních šest vlastních frekvencí a tvarů. Poměr první a šesté vlastní frekvence je přibližně 1:250.

Pro účely studie byl konzolový nosník rozdělen na 20 částí a na každé části definována ohybová tuhost $EI$ (tedy $EI_1$ až $EI_{20}$). Protože nás zajímají pouze relativní změny frekvencí ve vztahu k relativním změnám tuhostí, byla počáteční tuhost uvažována jako jednotková, stejně

tak i další parametry nosníku (hmotnost $m$, délka nosníku $l$). Poškození nosníku v daném místě bylo modelováno snížením ohybové tuhosti dané části na 0,95–0,05 nominální hodnoty. Výpočet se provedl opakovaně pro poškození ve všech částech s tím, že poškozena byla vždy právě jedna část. Zmíněný rozsah poškození byl zkoumán z důvodu schopnosti inverzní analýzy detekovat poškození na základě pouhé změny vlastních frekvencí. Jak vyplývá z výsledků, „malé“ poškození způsobuje pouze jejich zanedbatelnou změnu. Podrobné výsledky jsou popsány v pracích Frantík & Lehký (2006) a Frantík a kol. (2007). Dále budou uvedeny jen některé obecné závěry z nich plynoucí pro následnou identifikaci.

Studie ukázala, že relativní změny frekvencí kopírují vlastní tvary nosníku a polohy jejich maximálních hodnot odpovídají polohám amplitud daných vlastních tvarů. Výraznější změna vlastních frekvencí (10 % a více) se objeví až v případě výraznějšího poškození (30 % nominální tuhosti). Poškození v místě uzlu vlastního tvaru se nijak neprojeví na změně odpovídající vlastní frekvence. Z toho vyplývá nutnost použít pro inverzní analýzu větší počet frekvencí; absence změny u jedné frekvence je kompenzována změnou u jiných frekvencí.



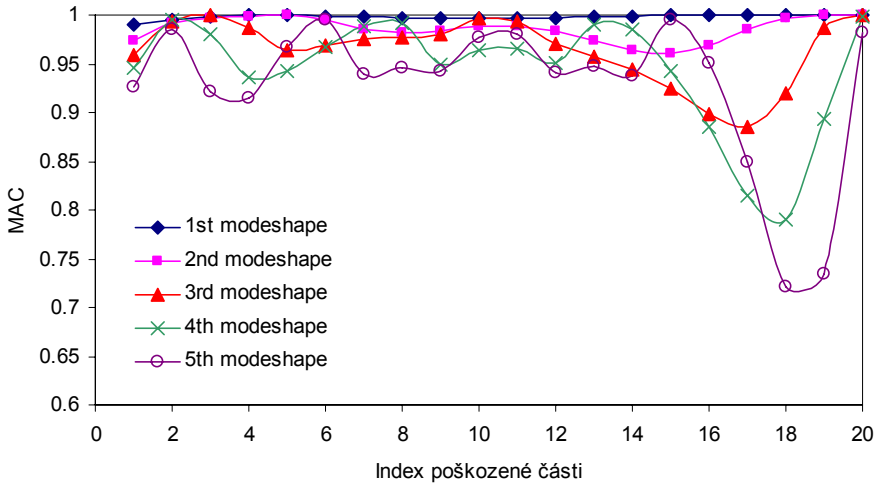

Obrázek 2 Maximální hodnoty relativních změn frekvencí (použito prvních 6 frekvencí) a určení vlastních frekvencí, které přísluší danému maximu (dle odstínu šedé v legendě)

Na obrázku 2 je znázorněno rozložení maximální relativní změny vlastních frekvencí (uvažováno je prvních šest vlastních frekvencí). Odstínem šedé je odlišena frekvence, která k danému maximu přísluší. Nejmenší relativní změna při velkém poškození (10 % počáteční tuhosti) je dle očekávání na volném konci konzolového nosníku (9 %, volnému konci odpovídá v obrázku 2 index 20). Další nízká hodnota při tomto poškození se nachází na částech 8 a 9 (18 % a 17 %) na přechodu mezi amplitudou prvního a druhého vlastního tvaru. Naopak, například pátá část, kde se nachází uzel druhého vlastního tvaru, vykazuje maximální změnu frekvence 28 % díky prvnímu vlastnímu tvaru. Relativní změny vyšších frekvencí nejsou tak výrazné jako u prvních dvou, jejich hodnoty však nabývají na významu směrem k volnému konci konzolového nosníku, kde význam prvních dvou frekvencí klesá. Je tedy zřejmé, že bez vyšších frekvencí by pak byla identifikace poškození v těchto částech obtížná.

Podobně jako pro vlastní frekvence byla provedena studie vlivu lokálního snížení tuhosti i pro vlastní tvary, a to ve formě srovnávacího kritéria MAC (Modal Assurance Criterion). To je pro *j*–tý vlastní tvar definováno následujícím vztahem:

$$MAC(\omega_j) = \frac{\left|\{v_{jv}^T\}_p \cdot \{v_{jd}\}_p\right|^2}{\left(\{v_{jv}^T\}_p \cdot \{v_{jv}\}_p\right)\cdot\left(\{v_{jd}^T\}_p \cdot \{v_{jd}\}_p\right)} = \frac{\left(\sum_p v_{jv}(p)\cdot v_{jd}(p)\right)^2}{\sum_p v_{jv}^2(p)\cdot\sum_p v_{jd}^2(p)}, \quad (1)$$

kde *v(p)* je pořadnice křivky *v(x)* v bodě *p*, index *v* udává neporušený stav (virgin), index *d* znamená porušený stav (damaged) a index *j* je *j*-tý vlastní tvar. Pokud MAC=1, pak porušený a neporušený stav jsou identické.



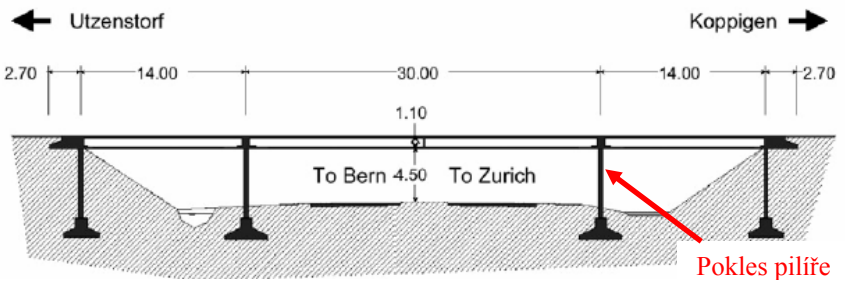

Obrázek 3 Porovnání kritéria MAC pro prvních pět vlastních tvarů při snížení tuhosti v konkrétním místě o 90 %

Výsledky publikované v práci Frantík a kol. (2007) ukazují opačný trend než u vlastních frekvencí, tedy že vyšší vlastní tvary vykazují vyšší změny sledovaného kritéria. Pro inverzní analýzu z toho vyplývá nutnost použití vyšších tvarů. První vlastní tvar vykazuje pouze nepatrnou změnu, která je z hlediska identifikace nevýznamná. Pro pokrytí celé konstrukce z hlediska identifikace poškození musí být uvažováno více vlastních tvarů dohromady. To je patrné z obrázku 3, kde je ukázáno kritérium MAC pro prvních pět vlastních tvarů pro extrémní úroveň poškození 90 %.

### 3.2. Most Z24

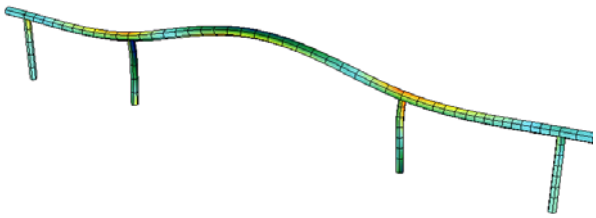
Stejný typ studie jako pro konzolový nosník byl proveden i pro most Z24 testovaný ve Švýcarsku, který dále posloužil pro verifikaci metodiky identifikace poškození (viz kapitola 4). Schéma mostu je patrné z obrázku 4. Na mostě byla prováděna celá řada měření, kdy byl vystaven různým scénářům poškození (Wenzel & Pichler, 2005). Získaná data jsou velmi podrobná a proto vhodná pro verifikaci identifikačního postupu.

Nejprve byl v programu SOFiSTiK vytvořen výpočtový model (prutový model se šesti stupni volnosti v každém uzlu) a naladěn tak, aby co nejlépe odpovídala numerická a experimentálně získaná data neporušené konstrukce (tuhosti, vlastní tvary a vlastní frekvence). Pro účely studie a následné identifikace byla mostovka rozdělena na 20 částí s různou ohybovou a torzní tuhostí. V místě napojení pilířů má mostovka větší tuhost způsobenou větší tloušťkou spodní a horní desky. Na obrázku 5 jsou znázorněny čtyři vlastní tvary mostu, které byly dále pro studii i identifikaci použity.



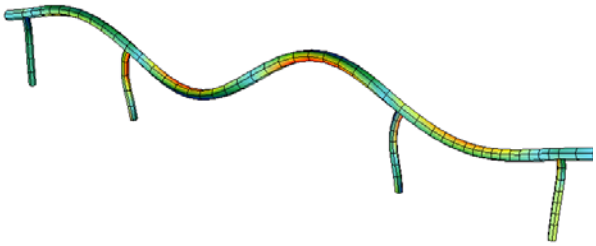

Obrázek 4 Schéma mostu Z24 ve Švýcarsku

1. vlatní tvar

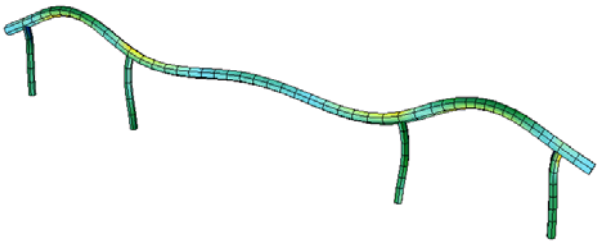


3. vlastní tvar

4. vlatní tvar



5. vlastní tvar

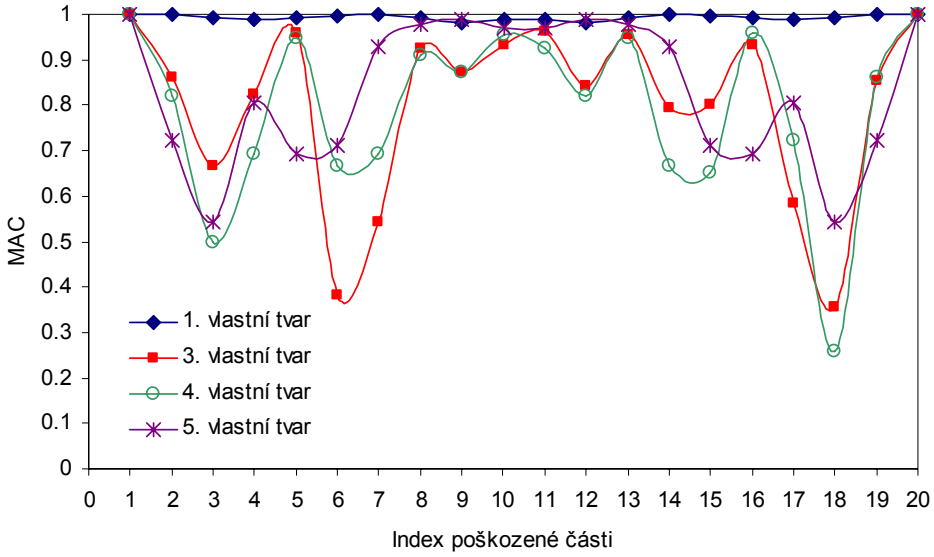


Obrázek 5 Čtyři vlastní tvary uvažované při studii a následné identifikaci – první a pátý jsou čistě ohybové, třetí a čtvrtý jsou kombinované ohybové s torzí (druhý zde neuvedený vlastní tvar je vodorovný ohybový a nebyl pro účely studie a identifikace uvažován)

Vzhledem k tomu, že most vykazuje jak ohybové tak torzní tvary (v kombinaci s ohybovými, viz dále) byla pro parametrickou studii uvažována jak ohybová tak torzní tuhost. Poškození v konkrétním místě pak znamená stejné relativní snížení obou tuhostí dané části. Rovněž byly provedeny studie, kdy se měnila pouze jedna z tuhostí (ohybová či torzní). Jejich výsledky zde nejsou uvedeny. Sloužily pro bližší pochopení vlivu jednotlivých tuhostí na konkrétní tvary. Ukázalo se, že torzní tuhost ovlivňuje pouze kombinované tvary (3. a 4.), ohybová pak všechny čtyři sledované tvary. Pro 4. tvar je kombinace obou tuhostí velmi důležitá a výslednou změnu tvaru způsobenou poškozením není možné získat pouhou sumací ohybové a torzní části jako u 3. tvaru. Skutečná relativní změna obou tuhostí při poškození leží pravděpodobně někde mezi těmito extrémy (nezávislá změna ohybové a torzní tuhosti

versus jejich funkční závislost). Z tohoto důvodu je vhodné při identifikaci poškození zavést mezi obě veličiny statistickou závislost.

Podrobnější výsledky je opět možné najít v práci Frantík a kol. (2007). Vyplývají z nich podobné závěry jako ze studie konzolového nosníku. Tvar relativních změn frekvencí znovu kopíruje vlastní tvary mostu. Vyšší relativní změny vykazují nižší frekvence. Pokles změn frekvencí s narůstajícím číslem tvaru není tak rychlý jako v případě konzolového nosníku, což je způsobeno přítomností i torzních tvarů. To se pozitivně projevilo při identifikaci poškození (kapitola 4) s využitím pouze vlastních frekvencí jako vstupní informace. Pro vlastní tvary platí znovu opačný trend než pro vlastní frekvence, tedy že vyšší vlastní tvary vykazují vyšší změny sledovaného kritéria. Pro inverzní analýzu z toho vyplývá nutnost použití vyšších tvarů. To je patrné z obrázku 6, kde je ukázáno kritérium MAC pro všechny čtyři uvažované tvary (zde pro extrémní úroveň poškození 90 %). Je zde i vidět velmi malá změna prvního tvaru pro takovéto extrémní poškození (modrá křivka).




Obrázek 6 Porovnání kritéria MAC pro čtyři uvažované vlastní tvary při snížení tuhosti v konkrétním místě o 90 %

## 4. Příklad identifikace

Mostní konstrukce Z24 popsaná v předchozí kapitole posloužila pro verifikaci popsaného identifikačního postupu založeného na umělých neuronových sítích a stochastické analýze konstrukce. Pro identifikaci poškození byl použit scénář, kdy došlo k poklesu pravého vnitřního pilíře (viz obrázek 4). Experimentálně získané vlastní frekvence jsou pro nepoškozený i poškozený stav uvedeny v tabulce 1. V první, zde popisované fázi, se pro identifikaci poškození uvažovalo pouze s vlastními frekvencemi jako vstupem pro inverzní analýzu (tabulka 2). Vzhledem k symetrii a velkému počtu neznámých (20 částí s 2 tuhostmi v každé z nich) byla identifikace omezena pouze na polovinu mostu, kde došlo k poklesu pilíře. Tím se snížil celkový počet neznámých tuhostí na 18, tedy 9 nezávislých částí se 2 tuhostmi (ohybovou a torzní) v každé z nich (poslední převislá část nebyla rovněž identifikována).

Neuronová síť použitá při identifikaci byla typu dopředný vícevrstvý perceptron a sestávala se z jedné skryté vrstvy s 8 nelineárními neurony a výstupní vrstvy čítající 18 lineárních neuronů (18 hledaných hodnot tuhostí). Vstupem neuronové sítě byly 4 parametry odpovídající 4 uvažovaným vlastním frekvencím. Pro vytvoření učící množiny byla tuhost randomizována s využitím rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti, přičemž se uvažovalo, že se pohybuje v rozmezí 25–125 % původní tuhosti (nepoškozený stav). Učící množina byla tvořena 500 simulacemi LHS, přičemž 450 z nich bylo použito pro samotné učení sítě, zbývajících 50 pak pro verifikaci případného přeučení sítě. Po naučení neuronové sítě jí byly předloženy experimentálně zjištěné frekvence jako vstupní parametry a provedena simulace sítě. Výsledkem je rozložení ohybové a torzní tuhosti podél mostu (18 hodnot, polovina mostu, obrázek 7). Závěrem byla provedena verifikace, kdy s výslednými tuhostmi byl znovu proveden výpočet softwarem SOFiSTiK a získány vlastní tvary a odpovídající vlastní frekvence (tabulka 1).

Tabulka 1: Vlastní frekvence pro neporušený a porušený stav mostu Z24

| Číslo vlastního tvaru | Neporušený stav | | Porušený stav | |
|---|---|---|---|---|
| | Experiment | Model | Experiment | Model |
| 1. | 3.89 | 3.87 | 3.67 | 3.75 |
| 3. | 9.80 | 9.81 | 9.21 | 9.38 |
| 4. | 10.30 | 10.42 | 9.69 | 9.95 |
| 5. | 12.67 | 12.03 | 12.03 | 12.26 |

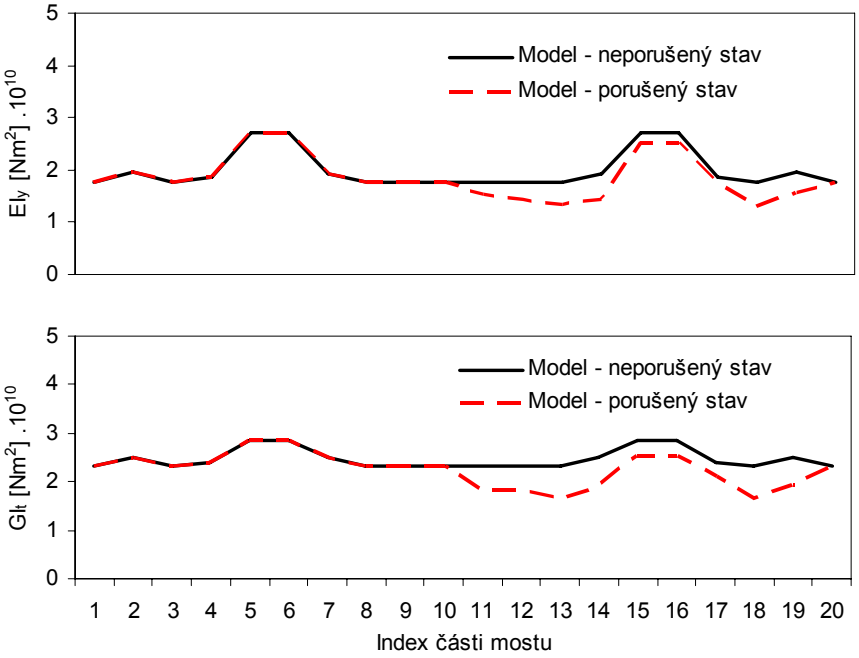
Na obrázku 7 je vykreslen průběh ohybové a torzní tuhosti podél mostu pro neporušený (referenční) a porušený (po poklesu pilíře) stav. Tuhosti pro porušený stav byly získány výše popsanou identifikací. Výsledné vlastní frekvence jsou uvedeny v tabulce 1. Na obrázku 8 je pro ukázku uvedeno porovnání experimentálně a numericky získaného vlastního tvaru (zde 4. tvar). Výsledky identifikace s využitím čtyř vlastních frekvencí ukázaly schopnost lokalizovat poškození pomocí navržené metodiky a tímto typem vstupní informace. Je však nutné zmínit, že v místě, kde došlo k poklesu pilíře, bylo dosaženo velkého poškození, které způsobilo velké relativní změny vlastních frekvencí. Při jejich menších změnách bude identifikace poškození více obtížná a bude nezbytné použít nějakou další vstupní informaci, např. přímo vlastní tvary, či tlumící charakteristiky apod.

## 5. Závěr

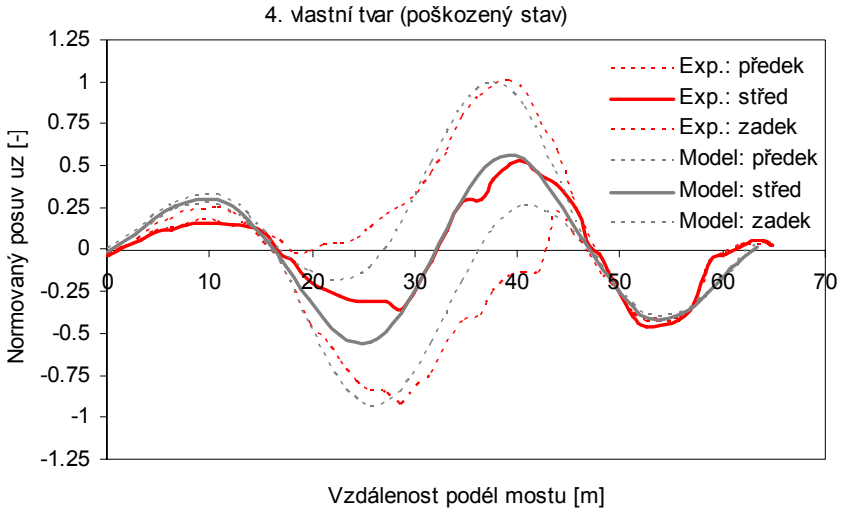
Cílem příspěvku bylo prezentovat výsledky počáteční fáze výzkumu zaměřeného na vytvoření metodiky pro lokalizaci poškození dynamicky namáhaných konstrukcí s využitím prostředků metod umělé inteligence. Identifikace polohy a úrovně poškození je velmi důležitá při stanovení zbytkové životnosti konstrukce, zejména u betonových mostů. Za tímto účelem jsou prováděny dynamické experimenty, nicméně bez použití sofistikované inverzní analýzy není možné toto poškození správně identifikovat.

## 6. Poděkování

Práce vznikla díky finanční podpoře v rámci projektů GAČR 103/07/P380 a GAČR 103/07/0760.




Obrázek 7 Ohybová a torzní tuhost pro porušený a neporušený stav




Obrázek 8 Experimentální a numericky získaný 4. vlastní tvar pro poškozený stav (kombinace ohybu a kroucení)

## 7. Literatura

Bergmeister, K., Strauss, A., Pukl, R. & Novák, D. (2007) Structural analysis and reliability assessment, SARA Part I: Life-cycle reliability assessment, virtual simulation for health monitoring and damage identification of bridges. *3rd Int. Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure (SHMII-3 2007)*, Vancouver, Canada (v tisku).

Cichocki, A. and Unbehauen, R. (1993) *Neural networks for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons Ltd. & B.G. Teubner, Stuttgart, Germany.

Fang, X., Luo, H. & Tang, J. (2005) Structural damage detection using neural network with learning rate improvement. *Computers and Structures*, 83, pp.2150-2161.

Frantík, P., Lehký, D. (2006). Význam vlastních frekvencí pro lokalizaci poškození konzolového nosníku. *Pravděpodobnost porušování konstrukcí*. Brno, pp.307-312.

Frantík, P., Lehký, D. & Novák, D. (2007) Modal properties study for damage identification of dynamically loaded structures. *The Third International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation (SEMC 2007)*, Kapské město, JAR (v tisku).

Huth, O., Feltrin, G., Maeck, J., Kilic, N. & Motavalli, M. (2005) Damage identification using modal data: Experiences on a prestressed concrete bridge. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 131:12, pp.1898-1910.

Iman, R.C. and Conover, W.J. (1980) Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models with an Application to Risk Assessment. *Communications in Statistics Theory and Methods*, Vol. A9, No. 17, pp.1749-1842.

Lehký, D. (2006) Inverzní stochastická analýza betonových konstrukcí, disertační práce, FAST, VUT v Brně.

Lehký, D. (2007) *DLNNET – program documentation.* Theory and User's Guides', Brno, Czech Republic (v přípravě).

Link, M. (1999) *Updating of analytical models – basic procedures and extensions*. Modal Analysis and Testing, (J.M.M. Silva and N.M.M. Maia, eds), NATO Science Series, Kluwer Academic Publ.

McKay, M.D., Conover, W.J. & Beckman, R.J. (1979) A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometrics*, 21, pp.239-245.

Novák, D. & Lehký, D. (2006) ANN Inverse Analysis Based on Stochastic Small-Sample Training Set Simulation. *Journal of Engineering Application of Artificial Intelligence*, 19, pp.731-740.

Novák, D., Vořechovský, M. & Rusina, R. (2007) *FReET v.1.5 – program documentation, User´s and Theory Guides*. Brno/Červenka Consulting, Czech Republic, http://www.freet.cz.

Pirner, M. & Fisher, O. (2003) Identifikace změn v konstrukci s použitím dynamické zkoušky. *2. mezinárodní konference DYN-WIND 2003 (Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering)*, Tále, Slovensko, pp.26-29.

SOFiSTiK AG. (2004) SOFiSTiK Analysis Programs, version 21.0, Oberschleissheim, Germany, http://www.sofistik.com.

Strauss A., Lehký, D., Novák, D., Bergmeister, K. & Santa, U. (2004) Probabilistic response identification and monitoring of concrete structures. *Third European Conference on Structural Control (3ECSC)*, Vienna University of Technology, Vienna, Austria.

Teughels, A., & De Roeck, G. (2004) Structural damage identification of the highway bridge Z24 by FE model updating. *Journal of Sound and Vibration*, 278, pp.589-610.

Wenzel, H. & Pichler, D. (2005) *Ambient vibration monitoring*. John Wiley & Sons Ltd., West Sussex, England.