

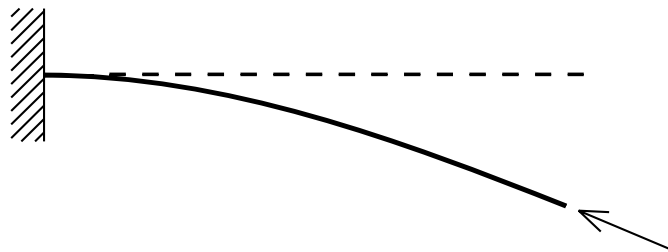
## POST-CRITICAL BEHAVIOUR OF BEAM LOADED BY FOLLOWER FORCE

P. Frantík<sup>1</sup>

**Summary:** *The paper is focused on numerical simulations of a cantilever beam loaded tangentially by follower force at its free end (Beck's column). Main purpose was to discover post-critical behaviour of the beam.*

### 1. Úvod

Stabilita konstrukcí je náročným a zajímavým problémem i když se soustředíme na ty nejjednodušší konstrukce. Tento pohled je podložen i historickým vývojem této problematiky, který se neobešel bez překvapivých zvrátů. Jeden z takových zvrátů se týkal tzv. sledujícího zatížení, které mění svůj směr v závislosti na tvaru konstrukce. Až do poloviny dvacátého století nebylo známo, zda-li a za jakých okolností ztrácí konzolový nosník zatížený na volném konci tangenciální sledující silou (anglicky také nazývaný *Beck's column*) svou stabilitu, viz Elishakoff (2005). Tento nosník je znázorněn v deformovaném stavu na obrázku 1.



Obrázek 1: Konzolový nosník zatížený sledující silou.

Je známo, viz Elishakoff (2005), že takto zatížený nosník ztratí stabilitu. Z původně nepohyblivého stavu se rozvine limitní cyklus. Jedná se o tzv. Hopfovu bifurkaci (zrod limitního cyklu z pevného bodu), viz např. (Arnold, 1983; Macur, 1995). Pro tento kritický bod platí (Beck, 1952):

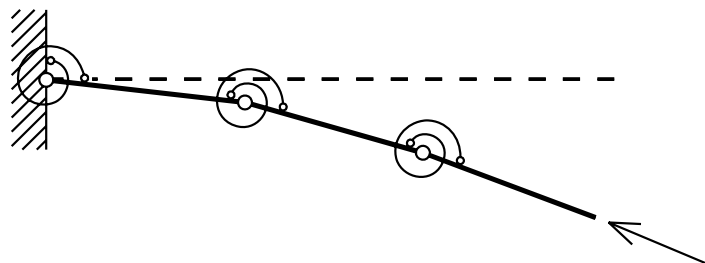
$$F_{cr, follower} \approx 20.05 \frac{EI}{L^2}, \quad (1)$$

kde  $F_{cr, follower}$  je kritická hodnota velikosti sledující síly,  $L$  je délka nosníku a  $EI$  jeho ohybová tuhost. Tento bifurkační bod, představující kvalitativní změnu stavu nosníku, lze s výhodou použít pro testování numerických modelů.

<sup>1</sup> Ing. Petr Frantík, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veverí 331/95, 602 00 Brno, e-mail kitnarf@centrum.cz

## 2. Numerický model

Model nosníku je ekvidistantně rozdělen na tuhé dílce vzájemně spojené klouby opatřené lineárními ohybovými pružinami, viz obr. 2. Nosník je uvažován konstantního průřezu, pružný a velmi štíhlý. Smykové přetvoření a konstantní složka normálového přetvoření je zanedbána. Vlastnosti nosníku jsou dány jeho celkovou hmotností  $M$ , délkou  $L$  a ohybovou tuhostí  $EI$ .



Obrázek 2: Model konzolového nosníku se třemi dílci.

Odvození dále uvedených pohybových rovnic modelu je podrobně uvedeno v Frantík (2004a). Pohybové rovnice modelu lze maticově zapsat v následujícím tvaru:

$$\mathbf{M} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}^2 - \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{D} + \mathbf{F},$$

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}.$$
(2)

kde  $t$  je čas,  $\boldsymbol{\varphi}$  a  $\boldsymbol{\omega}$  jsou vektory stavových proměnných modelu, přičemž  $\boldsymbol{\varphi}$  je vektor úhlových pootočení jednotlivých dílců a  $\boldsymbol{\omega}$  je vektor jejich úhlových rychlostí.  $\mathbf{M}$  je matice setrvačnosti,  $\mathbf{Q}$  je specifická matice bez známého fyzikálního významu,  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti,  $\mathbf{D}$  je vektor momentů tlumících sil a  $\mathbf{F}$  je vektor momentů vnějších sil. Matice setrvačnosti  $\mathbf{M}$  má následující podobu:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} m l^2 \begin{bmatrix} 2(3(n-1)+1) & 3(2(n-2)+1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 3(2(n-3)+1) \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \cdots & 3 \cos(\varphi_n - \varphi_1) \\ & 2(3(n-2)+1) & 3(2(n-3)+1) \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & \cdots & 3 \cos(\varphi_n - \varphi_2) \\ & & 2(3(n-3)+1) & \cdots & 3 \cos(\varphi_n - \varphi_3) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 2 \end{bmatrix},$$
(3)

kde  $m$  je hmotnost dílce a  $l$  je jeho délka. Je-li nosník (ekvidistantně) rozdělen na  $n$  dílců pak jednoduše platí  $m = M/n$  a obdobně  $l = L/n$ . Indexování dílců probíhá od vetknutí po volný konec (dílec u vetknutí má index 1).

Matice  $\mathbf{Q}$  má následující podobu:



$$\begin{aligned} D_{x,i} &= -c m v_{x,i}, \\ D_{y,i} &= -c m v_{y,i}, \end{aligned} \quad (9)$$

kde  $c$  je koeficient lineárního viskózního útlumu a  $v_{x,i}, v_{y,i}$  jsou složky rychlosti  $v_i$   $i$ -tého kloubu (klouby jsou číslovány od vetknutí s indexem 0 po volný konec s indexem  $n$ ). Pro tyto složky rychlosti platí:

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= -l \sum_{j=1}^i \omega_j \sin \varphi_j, \\ v_{y,i} &= l \sum_{j=1}^i \omega_j \cos \varphi_j. \end{aligned} \quad (10)$$

Vektor momentů tlumících sil  $\mathbf{D}$  lze s užitím výrazů (8,9,10) upravit:

$$\mathbf{D} = c m l^2 \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \sin \varphi_j) \\ \cos \varphi_2 \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \sin \varphi_j) \\ \vdots \\ \cos \varphi_n \sum_{j=1}^n \omega_j \sin \varphi_j \end{bmatrix} + c m l^2 \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \cos \varphi_j) \\ \sin \varphi_2 \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^i \omega_j \cos \varphi_j) \\ \vdots \\ \sin \varphi_n \sum_{j=1}^n \omega_j \cos \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Pohybové rovnice modelu jsou řešeny pomocí standardních numerických metod pro disipativní dynamické systémy. Konkrétně je užitá modifikovaná Eulerova metoda a metoda Runge-Kutta.

### 3. Simulace

Pro nastavení parametrů numerické simulace pomocí uvedeného modelu byl užit ocelový prut s vlastnostmi odpovídajícími reálnému štíhlému ocelovému nosníku. Hmotnost nosníku  $M = 9.03$  gramů, délka  $L = 0.3$  metrů, tuhost  $EI = 0.0053 \text{ Nm}^2$ , viz (Frantík, 2004a,b).

Prut byl modelován 15 dílci, přičemž bylo pomocí modelu s 20 dílci ověřeno, zda to je v daném rozsahu konfiguračního prostoru<sup>3</sup> dostatečně jemné dělení. Obdobně byl testován krok časové diskretizace, který byl nastaven na jednu desetitisícinu sekundy (ověřován krokem jedné stotisíciny sekundy a změnou numerické metody).

Výstižnost modelu lze charakterizovat porovnáním naměřených a vypočtených kritických sil (tj. významných bifurkačních bodů). Eulerova kritická síla, pro kterou platí  $F_{cr} = \pi^2 EI / 4L^2$  byla naměřena 0.1453 N, přičemž teoretická hodnota je přibližně také 0.1453 N. Kritická síla pro sledující zatížení byla změřena 1.1716 N (20 dílců), které odpovídá teoretická hodnota přibližně 1.1807 N (odchylka přibližně 0.8%). Uvedme, že uvedená kritická hodnota sledující síly odpovídá konzervativnímu systému (bez útlumu). Je totiž závislá na velikosti koeficientu útlumu  $c$ , viz tabulka 1.

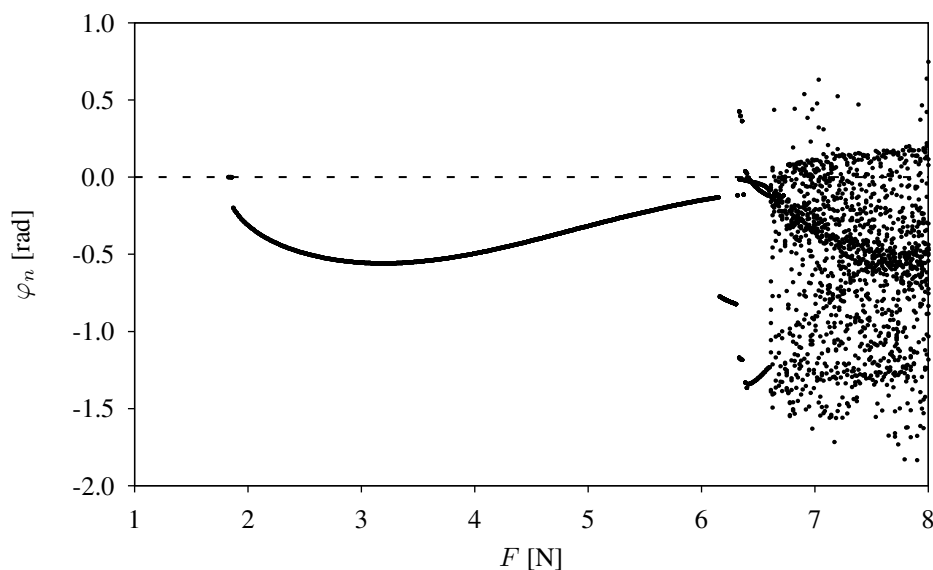
Pro sledování vývoje simulace je nutné vybrat vhodné stavové veličiny. Je to obzvláště důležité, je-li chování systému složité. V takovém případě je užitečné provádět zobrazení ve fázovém prostoru a využívat konstrukce Poincarého map, viz (Macur, 1995). Pro tento účel byly vybrány stavové proměnné posledního dílce (dílec s volným koncem), tj.  $\varphi_n$  a  $\omega_n$ . Poincarého mapa je konstruována z podmínky  $y_n = 0 \wedge v_{y,n} > 0$ . Ukázalo se, že tento způsob provádění Poincarého mapy je použitelný jen do určité úrovně pootočení.

<sup>3</sup> Rozsah konfiguračního prostoru lze zhruba popsat rozmezím pro parametr tlumení  $c = 0.001$  až  $100 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$  a pro sílu  $F = 0$  až  $8 \text{ N}$ . Ovšem horní mez síly je závislá na velikosti útlumu. Uvedená maximální hodnota je pro útlum  $c = 100 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Tabulka 1: Závislost kritické síly na útlumu.

$c$ [ $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ]	$F_{cr, follower}$ [N]
0.001	1.1716
0.01	1.1716
0.1	1.1717
1	1.1721
10	1.1877
100	1.8118

Ze simulací vyplynulo, že nejzajímavější chování vykazují systémy s vysokým útlumem, konkrétně s koeficientem útlumu  $c = 100 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ . Toto zjištění je ale ovlivněno numerickou stabilitou resp. nestabilitou úloh s nízkým útlumem potažmo jejich časovou náročností. Na obr. 3 je vidět bifurkační diagram pro tuto hodnotu útlumu v rozsahu zatěžující síly  $F = 1$  až 8 N.

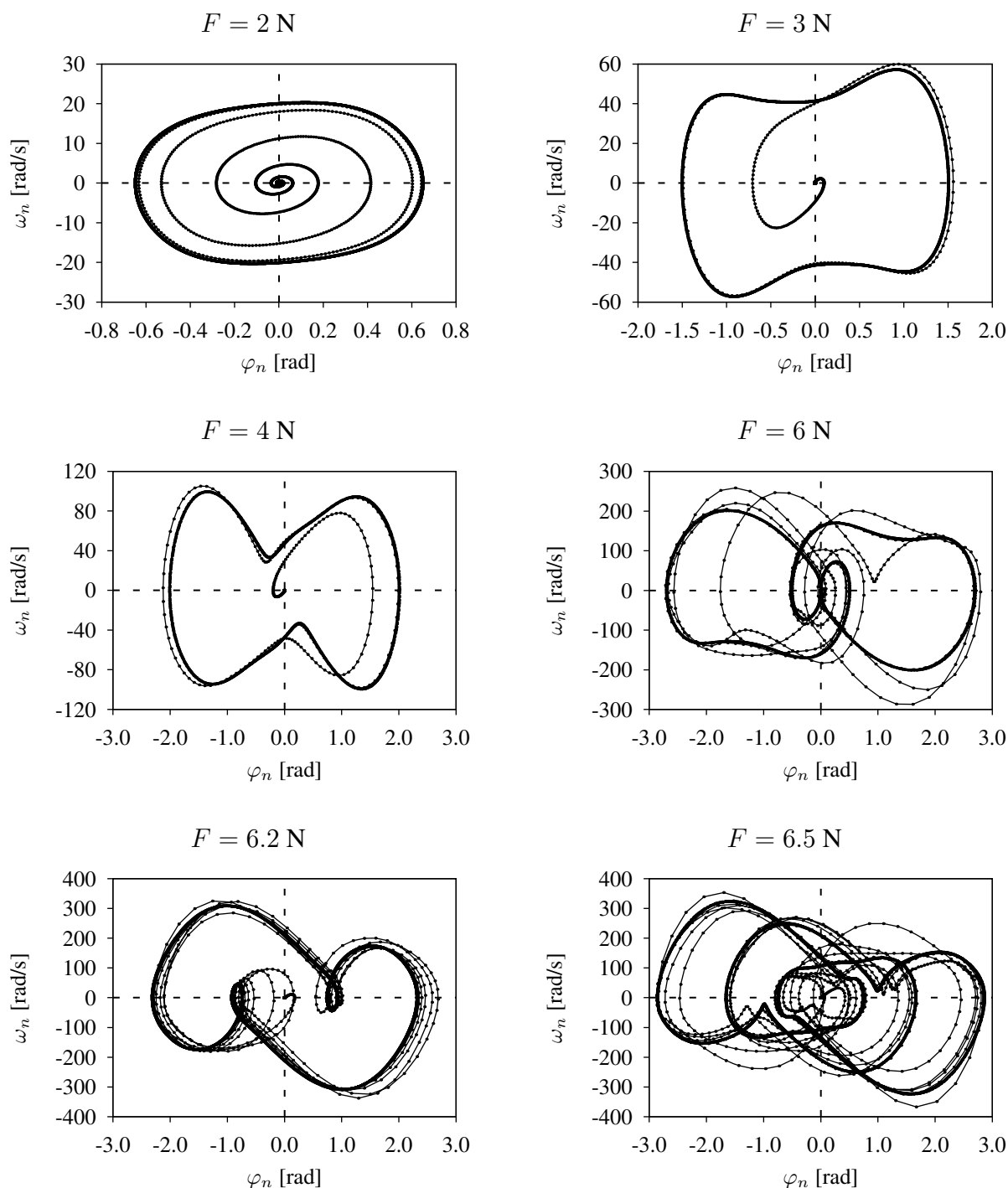


Obrázek 3: Bifurkační diagram pro koeficient útlumu  $c = 100 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$  a rozsah zatěžující síly  $F = 1$  až 8 N.

Tento diagram byl vytvořen tak, že pro každou hodnotu parametru velikosti zatěžující síly  $F$  byla znovu spuštěna simulace z počátečního nedeformovaného stavu, který byl opatřen velmi malou imperfekcí<sup>4</sup>. V počáteční fázi diagramu patrný výskyt kritické síly  $F_{cr, follower} = 1.8118 \text{ N}$ .

Z tohoto diagramu bylo vybráno několik bodů pro zobrazení trajektorií a výsledných limitních cyklů, viz obr. 4. Trajektorie  $F = 2 \text{ N}$  je těsně za bifurkačním bodem. Limitní cykly  $F = 2$  až  $6.2 \text{ N}$  jsou jednoduché s jedním bodem v Poincarého mapě. Avšak limitní cyklus  $F = 6.5 \text{ N}$  má již tři body v Poincarého mapě.

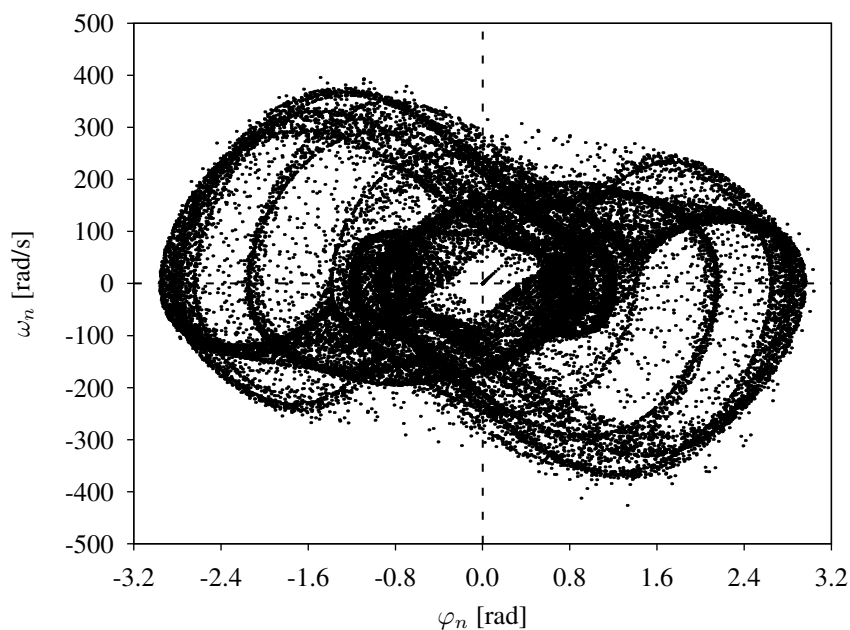
<sup>4</sup> Imperfekce byla zvolena statická ve formě síly působící na volném konci nosníku kolmo na jeho nedeformovanou střednici. Její velikost byla zvolena  $10^{-10} \text{ N}$ .



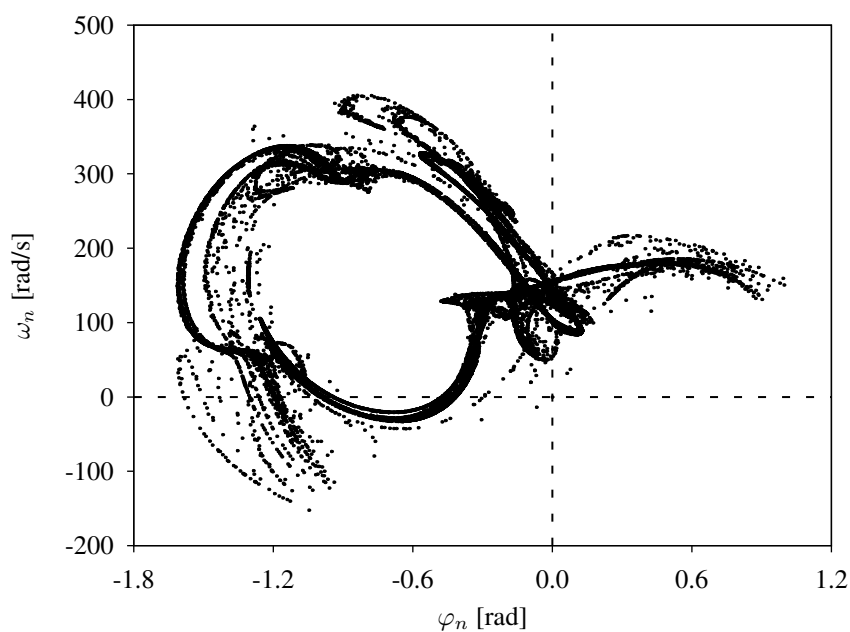
Obrázek 4: Vybrané trajektorie včetně výsledných limitních cyklů pro koeficient útlumu  $c = 100 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ . Body na trajektorích znázorňují její vývoj – časový odstup mezi nimi je konstantní (umístění limitních cyklů je patrné z bifurkačního diagramu na obr. 3).

Z chaotické oblasti byla vybrána konfigurace  $F = 7 \text{ N}$ . Odpovídající trajektorie je zobrazena na obr. 5 a Poincarého mapa na obr. 6. Z Poincarého mapy je patrné, že není zvolena zcela optimálně. Ze zobrazení je patrná deformace atraktoru.

Nalezení optimálního způsobu provádění Poincarého mapy není v této úloze jednoduché



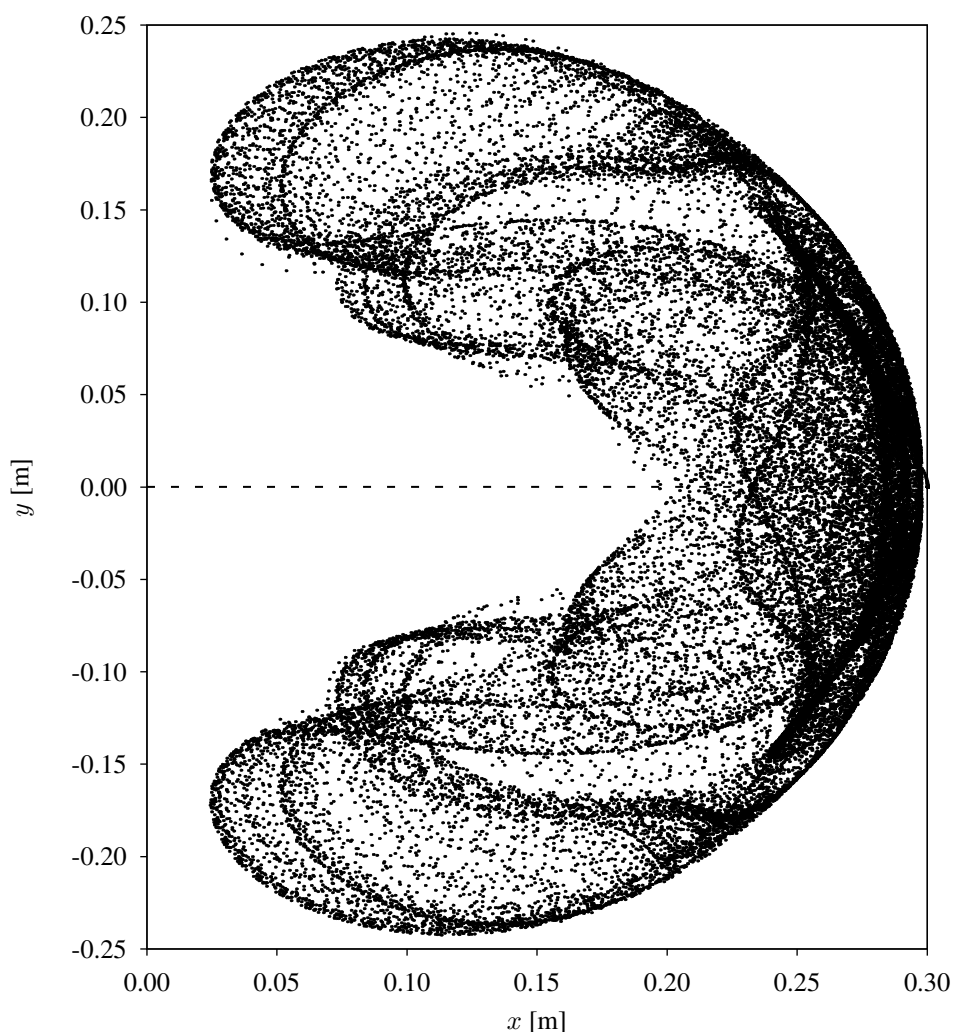
Obrázek 5: Trajektorie chaotického atraktoru  $F = 7 \text{ N}$  (pro přehlednost zobrazení jsou vynechány spojnice bodů).



Obrázek 6: Poincarého mapa chaotického atraktoru  $F = 7 \text{ N}$ .

z důvodu nesnadné identifikace další (alespoň) jedné stavové proměnné. Z teorie nelineárních dynamických systémů je známo, že pro vznik chaotického atraktoru je třeba minimálně trojrozměrný fázový prostor, viz např. (Macur, 1995). Uvedený numerický model má sice stavových proměnných  $2n$ , nicméně „optimální třetí“ proměnnou žádná z nich jednotlivě zřejmě netvoří. Proto byla vybrána integrální  $y_n$ . Nalezení vhodnější proměnné je tedy otázkou budoucí.

Pro ilustraci pohybu nosníku je na obr. 7 zobrazena poloha volného konce nosníku při pohybu na chaotickém atraktoru.



Obrázek 7: Poloha volného konce nosníku při pohybu na chaotickém atraktoru  $F = 7$  N (pro přehlednost zobrazení jsou vynechány spojnice bodů).

#### 4. Závěr

Článek se věnoval náročné úloze pokritického působení konzolového nosníku zatíženého sledující silou působící tangenciálně na jeho volném konci. Pro numerické simulace byl podrobně definován numerický model, schopný výpočtu velkých deformací a velmi přesně vystihující známé bifurkační body. Tento model ale díky štíhlosti, tedy i pružnosti při velkých deformacích, zanedbává smykové a normálové přetvoření nosníku.

Byl uveden vliv koeficientu lineárního viskózního útlumu na velikost kritického zatížení. Ukázalo se, že se tato výrazně mění až při značně velkém útlumu.

Pro vytvoření bifurkačního diagramu a zobrazení vybraných limitních cyklů resp. chaotického atraktoru byl vybrán systém s nejvyšší sledovanou úrovní útlumu. S tímto souvisela podrobněji



rozebraná problematika vytváření Poincarého mapy. Bylo konstatováno, že navržený způsob provádění Poincarého mapy je použitelný, ale nikoliv zcela optimální kvůli deformaci mapy chaotického atraktoru.

Závěrem poznamenejme, že při simulacích byla zjištěna překvapivá závislost velikosti kritického zatížení na definici útlumu. Tento problém zde nebyl podrobněji rozebrán, jelikož se přímo netýká uvedeného a zasluhuje si větší pozornost. Po provedení výzkumu o tom bude referováno.

## 5. Poděkování

Článek byl vytvořen v rámci projektu GAČR 103/08/0275.

## 6. References

- Arnold, V.,I. 1983: *Teória katastrof* (orig. Teorija katastrof, vydavateľstvo Moskevské univerzity 1983), vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1983.
- Beck, M. 1952: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik*, Volume 3, Issue 3, p. 225-228.
- Elishakoff, I. 2005: Controversy Associated With the So-Called "Follower Forces", *Applied Mechanics Review*, vol. 58, p. 117-142.
- Frantík, P. 2004: *Nelineární projevy mechanických konstrukcí*, dizertační práce, Ústav stavební mechaniky FAST VUT v Brně, Brno 2004. Dostupná na adrese: <http://kitnarf.cz/publications/2004/2004.08.dizertace/2004.08.dizertace.pdf>.
- Frantík, P. 2004: *Měření volného kmitání prutu v pokritickém stavu*, sborník Česko – Slovenské konference Experiment '04, CERM Brno 2004, p. 93-97.
- Macur, J. 1995: *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*, skripta, nakladatelství PC-DIR, Brno 1995.