

FREKVENČNÍ ANALÝZA VZPÍRANÉHO PRUTU

Michal Štafa¹, Petr Frantík², Tomáš Pail³

Abstract

The paper is focused on change of eigenfrequencies of a slender cantilever beam which is loaded in compression. Two ways were used for loading the beam: compressive force and displacement of beam endpoint.

1 ÚVOD

Článek je zaměřen na vývoj vlastních frekvencí štíhlého konzolového prutu vlivem zatížení ve vzpěru. Zatížení na konci konzoly je realizováno dvěma způsoby: silou a vnučeným posunutím. Motivací bylo porovnání s publikovanými výsledky získanými experimentem včetně souvisejících tezí [6] a průzkum postkritické oblasti.

Štíhlý, pružný a dokonale přímý prut může vlivem tlakové síly, působící ve směru jeho nepřetvořené osy, ztratit stabilitu při dosažení kritického bodu, jenž je pro zatěžující sílu dán známým výrazem:

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2}, \quad (1)$$

kde F_{cr} je kritická velikost zatěžující síly, EI je ohybová tuhost průřezu a L_{cr} je tzv. kritická délka prutu, přičemž pro konzolový nosník je kritickou délkou dvojnásobek délky nosníku L , tedy platí $L_{cr} = 2L$.

Je-li prut dokonale přímý a má-li normálovou tuhost EA , pak je kritické síly dosaženo koncovým posunutím prutu o hodnotu u_{cr} , pro kterou platí:

$$u_{cr} = \frac{F_{cr} L}{EA} = \pi^2 \frac{I}{A} \frac{L}{L_{cr}^2} = \pi^2 i^2 \frac{L}{L_{cr}^2}, \quad (2)$$

kde i je poloměr setrvačnosti průřezu, A je plocha průřezu a I je moment setrvačnosti. Postkritickou velikost posunutí koncového bodu u lze pro přímý a štíhlý prut analyticky získat, díky Ržanicinovu řešení [7] ve tvaru:

$$\begin{aligned} u &= \frac{FL}{EA} + u_r, \quad u_r = 2L \left(1 - \frac{H(\kappa)}{K(\kappa)} \right), \quad \kappa = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad F_r = \frac{4EI}{L_{cr}^2} K^2(\kappa), \\ K(\kappa) &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \kappa^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \kappa^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \kappa^6 + \dots \right), \\ H(\kappa) &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \kappa^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\kappa^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{\kappa^6}{5} - \dots \right), \end{aligned} \quad (3)$$

kde θ_0 je koncové pootočení nosníku, které zde slouží jako parametr iterativního řešení. Tento parametr je třeba iterativně nalézt právě takový, aby velikost síly F_r byla rovna velikosti zatěžující síly F .

¹ Ing. Michal Štafa, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Veveří 95, 602 00 Brno, stafa.m@fce.vutbr.cz.

² Ing. Petr Frantík, Ph.D., dtto, kitnarf@centrum.cz.

³ Ing. Tomáš Pail, dtto, pail.t@fce.vutbr.cz.

Dodejme, že výraz (3) je ve smyslu superpozice stlačení prutu a jeho vybočení přibližný, jelikož při velkém vybočení není celý prut stejnoměrně normálově namáhán (obecně je část střednice prutu tlačena a část tažena).

K uvedenému Ržanicinovu řešení, které je doposud odborné veřejnosti málo známé, doplníme výraz pro výpočet vybočení volného konce prutu w [7]:

$$w = L_{cr} \frac{\kappa}{K(\kappa)}. \quad (4)$$

První vlastní frekvenci nezátíženého konzolového prutu konstantního průřezu f_0 můžeme odhadnout výrazem, jenž zanedbává vliv smykového přetvoření a rotační setrvačnosti [1]:

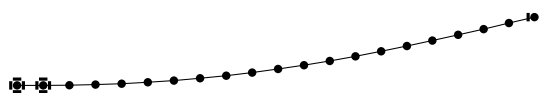
$$f_0 = \frac{1.875^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{L^3 m}}, \quad (5)$$

kde m je hmotnost prutu.

2 MODEL

Nosník je modelován pomocí fyzikální diskretizace, jejíž implementace je volně dostupná ve formě aplikace FyDiK2D [2] a stejnojmenné Java knihovny s otevřeným zdrojovým kódem pod licencí GNU GPL [3]. Podrobný popis diskretizační metody lze nalézt v [4]. Takto vytvořený numerický model je schopný vyřešit danou úlohu plně nelineárně (zde se jedná především o geometrickou nelinearitu), v rámci dané diskretizace.

Fyzikální vlastnosti modelu prutu jsou následující: délka vyložení prutu $L = 1.9$ metru, modul pružnosti materiálu $E = 10$ GPa, objemová hmotnost 1000 kg/m^3 , plocha průřezu $A = 10^{-5} \text{ m}^2$ (hmotnost prutu 0.019 kg), moment setrvačnosti průřezu prutu $I = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$. Tlumení je voleno různě takové, aby významně neovlivňovalo požadované výsledky. Optimálně velké tlumení pro hledání statických stavů, optimálně malé pro frekvenční analýzu. Prut je rozdělen na 19 dílků, dvacátý dílek slouží jako vetknutí, přičemž prodlužuje prut na délku dva metry, viz obr. 1.



Obr. 1. Model vybočeného prutu zatíženého vnuteným posunutím volného konce včetně realizace vetknutí pomocí jednoho dílku

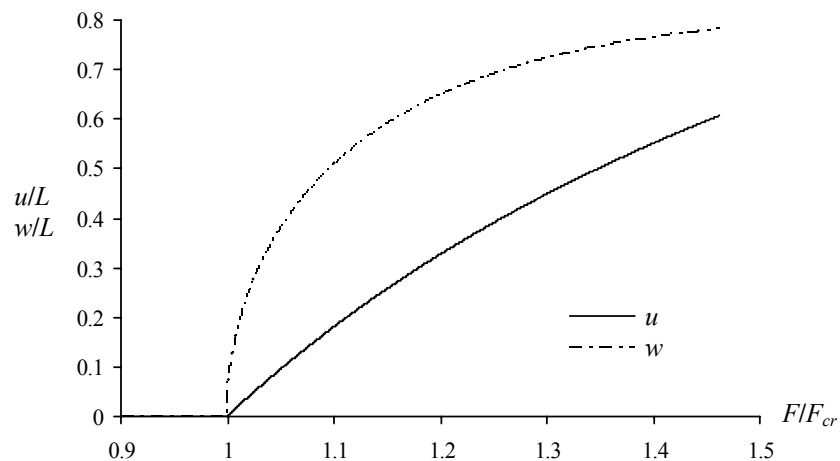
Pro účely výpočtu vlastních frekvencí je model zatížen počátečními podmínkami, které vedou k jeho rozkmitání. Doba simulace a zároveň perioda rychlé Fourierovy transformace se přizpůsobuje řešenému problému tak, aby co nejpřesněji vystihla nejnižší vlastní frekvence.

3 VÝSLEDKY VÝPOČTU

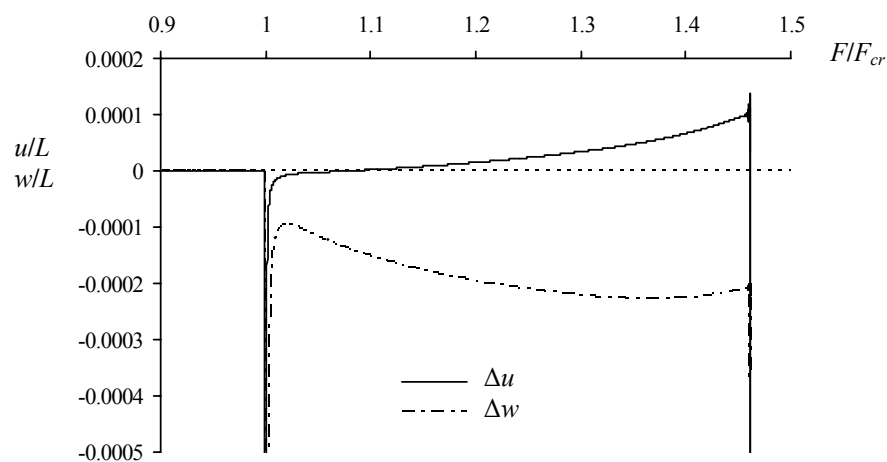
Nejprve porovnejme vlastnosti numerického modelu a teoretického prutu. Prut má kritickou sílu, dle výrazu (1), $F_{cr} = 136.6981 \text{ N}$ a první vlastní frekvenci při volném kmitání, podle výrazu (6), $f_0 = 21.920 \text{ Hz}$. Výše popsaný numerický model s 19 respektive 20 dílci má kritickou sílu přibližně $F_{cr} = 136.8075 \pm 0.0005 \text{ N}$ a první vlastní frekvenci při volném kmitání $f_0 = 21.871 \pm 0.005 \text{ Hz}$. Rozdíly činí 0.08% v kritické síle a 0.2% v nalezené první vlastní frekvenci.

Další porovnání teoretického řešení ideálního prutu s numerickým, který byl získán dynamickou simulací, vidíme na obr. 2. Simulace byla provedena nezávisle ze dvou směrů. Od nulové síly po kritickou a od síly 200 N ($\approx 1.46 F_{cr}$) zpět, rovněž po její kritickou hodnotu. Zobrazeny jsou funkce postkritických hodnot obou posunů volného konce konzoly. V těchto rozsazích jsou rozdíly mezi řešeními prakticky nerozeznatelné. Pro posouzení velikosti odchylek slouží graf na obr. 3. Zde jsou zobrazeny absolutní odchylky mezi teoretickým a numerickým řešením. Připomeňme, že numerické řešení bylo získáno dynamickou simulací, což je patrné zejména na výkmitu zcela vpravo, který je způsoben spuštěním zatěžování posunutím. Další velký výkmit se

týká dosažení kritické síly, kde je systém nestabilní a jeho ustalování by trvalo neúnosně dlouho. Je zde jasně vidět typický problém při dosažení bifurkačního bodu.



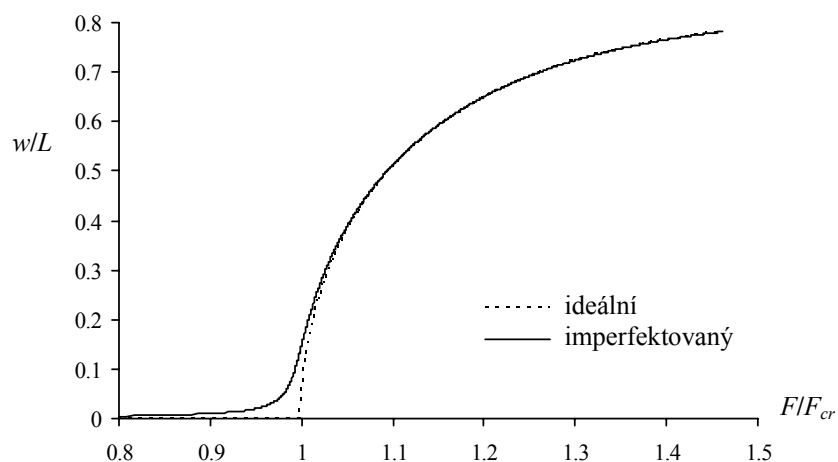
Obr. 2. Průběh posunů volného konce při vybočení ideálního prutu (zobrazeny jsou hodnoty vybočení pouze na jednu stranu)



Obr. 3. Odchylky řešení posunů volného konce získané dynamickým výpočtem a výpočtem dle výrazu (3) pro ideální prut

Z grafu odchylek na obr. 3 je patrné jak přesně numerický model s 19 dílci vystihuje teoretické řešení (3). Poznamenejme, že grafy jsou transformovány do bezrozměrných tvarů, přičemž touto transformací mizí výše uvedený rozdíl mezi kritickými silami.

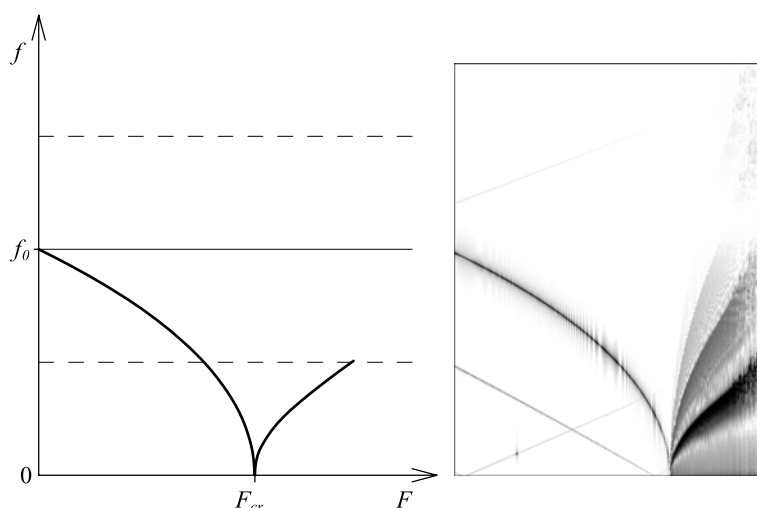
Na obr. 4 je vidět další porovnání, tentokrát výsledků numerických řešení vybočení w pro ideální a imperfektovaný prut. Imperfekce je zde zvolena geometrická ve tvaru kružnice s poloměrem 1 km s odpovídajícím koncovým příčným posunutím $w_0 = 0.0019$ m (poloměr vztažen k délce 2 m). Imperfektovaný prut se chová typicky jako systém se superkritickou vidličkovou bifurkací, který je postižen ztrátou symetrie, pojednáno podrobněji v [5].



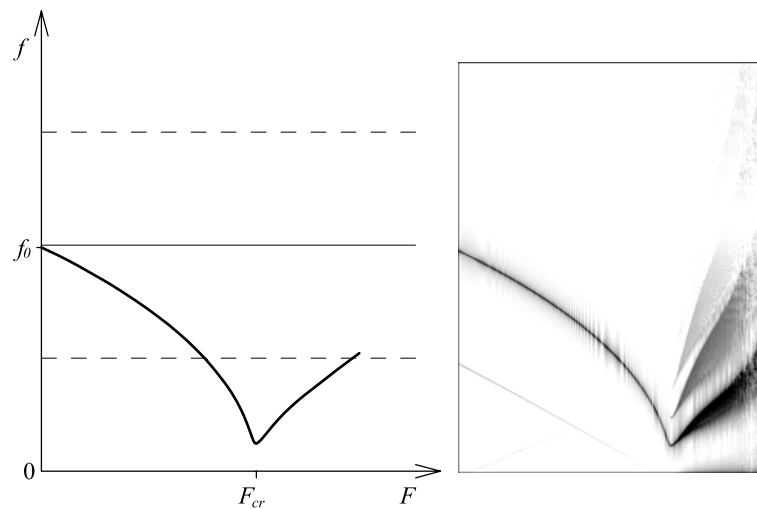
Obr. 4. Průběh vybočení volného konce pro ideální a imperfektovaný prut (zobrazeny jsou hodnoty vybočení pouze na stranu imperfekce)

Dále zobrazené grafy a bitmapy znázorňují výsledky frekvenční analýzy kmitání zatíženého nosníku pomocí rychlé Fourierovy transformace. Jsou zde celkem čtyři varianty. Jedná se o kombinaci ideálního (obr. 5, 7) a imperfektovaného prutu (obr. 6, 8 s imperfekcí kvantifikovanou výše) se zatěžováním silou (obr. 5, 6) a vnuteným posunem koncového bodu (obr. 7, 8). Bitmapy v monochromatické stupnici (zvýrazněné gama korekcí) zobrazují výsledná amplitudová spektra pro různé úrovně velikosti síly F , respektive velikosti statické reakce v případě vnuteného posunu. Velikost amplitudy je v tomto případě znázorněna odstínem šedé, tj. čím tmavější barva, tím vyšší amplituda. Grafy vlevo od bitmap zvýrazňují průběhy první vlastní frekvence.

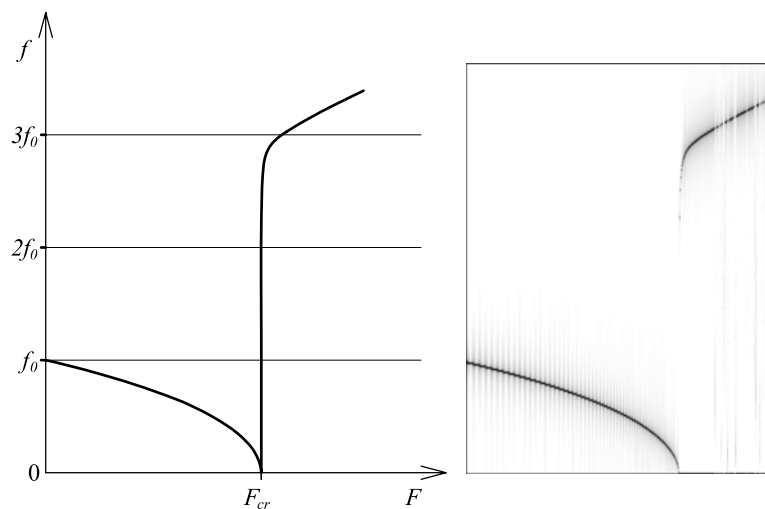
Jedině imperfektovaný prut zatěžovaný posunutím (obr. 8) vykazuje v prekritické oblasti poměrně překvapivý vývoj, který byl prezentován i v článku [6]. Jedná se o strmý nárůst první vlastní frekvence před dosažením kritické síly ideálního prutu. Minimum vlastní frekvence zde zřejmě nebude vhodným ukazatelem kritické síly ideálního prutu (odpovídá síle přibližně $F = 120.4 \pm 0.2$ N).



Obr. 5. Výsledek frekvenční analýzy ideálního prutu zatěžovaného silou (vlevo průběh první vlastní frekvence, vpravo amplitudové spektrum)



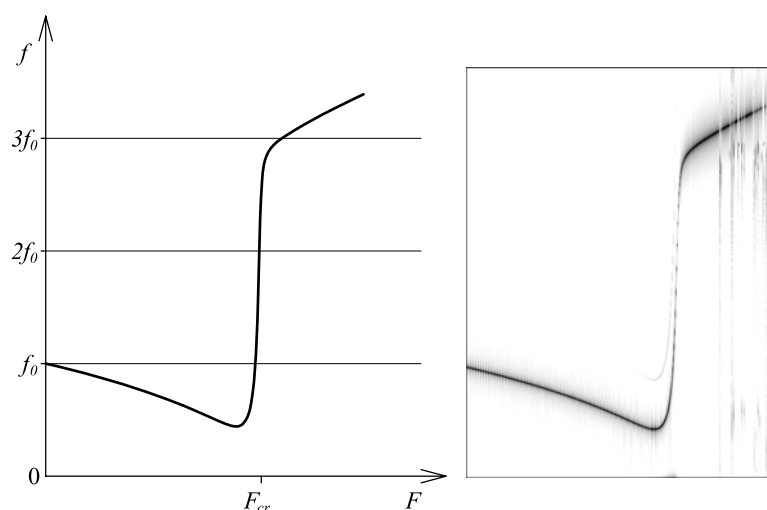
Obr. 6. Výsledek frekvenční analýzy imperfektovaného prutu zatěžovaného silou (vlevo průběh první vlastní frekvence, vpravo amplitudové spektrum)



Obr. 7. Výsledek frekvenční analýzy ideálního prutu zatěžovaného vnučeným posunutím (vlevo průběh první vlastní frekvence, vpravo amplitudové spektrum)

Z postkritických průběhů u zatěžování posunutím (obr. 7 a 8) lze vyvozovat, že zamezení posunutí volného konce úlohu podstatně mění, což se zřejmě projevilo na výše zmíněném překvapivém vývoji vlastní frekvence u imperfektovaného prutu v prekritické oblasti.

Poznamenejme, že postkritické kmitání prutu zatěžovaného silou je ve smyslu frekvenční analýzy značně závislé na použitých počátečních podmínkách, jelikož prut kmitá ve velkých deformacích (kmity jsou periodické, ale nikoliv harmonické). Tento fakt má nutně za následek komplikovaný výsledek Fourierovy transformace, viz obr. 5 a 6. Dále je nutné dodat, že prut ve velkých deformacích i při malém tlumení mění svoji frekvenci s klesajícím rozkmitem, což se projevuje na „rozmazání“ amplitudového spektra (rovněž patrné na obr. 5 a 6).



Obr. 8. Výsledek frekvenční analýzy imperfektovaného prutu zatěžovaného vnučeným posunutím (vlevo průběh první vlastní frekvence, vpravo amplitudové spektrum)

4 ZÁVĚR

Článek se věnoval numerickému řešení první vlastní frekvence konzolového nosníku zatíženého vzpěrnou silou nebo odpovídajícím posunutím koncového bodu. K výpočtu frekvence bylo použito rychlé Fourierovy transformace.

Ukázalo se, že zatěžování vnučeným posunutím koncového bodu úlohu zásadně mění i v prekritické oblasti v případě, že je prut imperfektovaný. Zároveň vnučené posunutí výrazně zvyšuje první vlastní frekvenci v postkritické oblasti. Konkrétně zhruba na trojnásobek vlastní frekvence volně kmitajícího nezatíženého prutu.

Teze uvedené v článku [6] lze považovat za částečně podložené v rámci teorie malých deformací. Z provedených simulací je zřejmé, že žádná z měřených veličin nevykazuje neomezený růst, ačkoliv k tomu v lokálním smyslu teorie malých deformací dochází. Jinak řečeno: zanedbání výrazné geometrické nelinearity vlivem velkých deformací u toho systému vede k výsledkům dosahujícím nekonečných hodnot (v případě vybočení prutu a první vlastní frekvence).

PODĚKOVÁNÍ

Článek byl vytvořen v rámci projektu GA ČR 103/08/0275 a výzkumného centra MŠMT 1M0579 CIDEAS.

LITERATURA

- [1] Brepta, R. - Půst, L. - Turek, F.: Mechanické kmitání, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha, 1994.
- [2] Frantík, P.: FyDiK2D Application: <http://kitnarf.cz/fydik>, 2007.
- [3] Frantík, P.: FyDiK2D Package: <http://kitnarf.cz/java/>, GNU GPL licence, 2009.
- [4] Frantík, P.: Diskrétní model FyDiK2D, sborník mezinárodní konference Modelování v mechanice 2009, VŠB-TU Ostrava, Česká republika, 2009.
- [5] Frantík, P. - Macur, J.: Kritická síla imperfektovaných systémů, sborník konference Modelování a měření nelineárních jevů v mechanice, Nečtiny, Česká republika, 2006.
- [6] Nagyová, M. - Ravinger, J.: Prút namáhaný tlakom – experiment, sborník mezinárodní konference Modelování v mechanice 2010, VŠB-TU Ostrava, Česká republika, 2010.
- [7] Ržanicin, A., R.: Ustojčivost' ravnovesija uprugich sistem, Gosudarstvennoje izdatel'stvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva 1955.