

# IDENTIFIKACE PRŮŘEZU Z DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ PRUTU

## CROSS-SECTION IDENTIFICATION FROM DYNAMICAL PROPERTIES OF BEAM

Petr Frantík<sup>1</sup>

### Abstrakt

Článek se věnuje problematice analytické i numerické inverzní analýzy průřezu prutu při známých dynamických vlastnostech. Je ukázáno úplné analytické řešení kubického problému pro dutý obdélníkový průřez.

### Klíčová slova

Prut konstantního průřezu, identifikace, inverzní analýza.

### Abstract

The paper deals with analytical and numerical inverse analysis of a beam of uniform cross-section from known dynamical properties. Full analytical solution of the cubic problem of a hollow rectangular cross-section is shown.

### Keywords

Beam of uniform cross-section, identification, inverse analysis.

## 1 Úvod

Abstrakce prutových konstrukcí na soustavy jednodimenzionálních prutů vede k dynamickým modelům s parametry průřezu, z nichž nelze jednoznačně identifikovat jeho tvar. Tento inverzní problém se objevuje při provádění teoretických analýz prutových konstrukcí, jakými jsou různé parametrické studie matematických modelů.

## 2 Definice

Mějme prut konstantního průřezu, dané hmotnosti  $m$ , délky  $L$ , tvořeného materiálem s hustotou  $\rho$  a modulem pružnosti  $E$ . Dále necht' známe jeho ohybovou tuhost  $EI$  (uvažujme velmi štíhlý prut), čímž snadno určíme nutnou velikost momentu setrvačnosti  $I$  (v anglické literatuře vhodněji označovaném jako druhý moment plochy). Úkolem je najít geometrické parametry průřezu splňující výše uvedené hodnoty.

Takto definovaná úloha je stále příliš nejednoznačná, proto se omezíme na zvolené geometrické tvary průřezu. Pro obdélníkový průřez šířky  $b$  a výšky  $h$  platí:

$$\begin{aligned} m &= \rho L b h, \\ I &= \frac{1}{12} b h^3. \end{aligned} \tag{1}$$

---

<sup>1</sup> Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno  
e-mail: kitnarf@centrum.cz

Z těchto dvou rovnic snadno odvodíme výrazy:

$$b = \sqrt{\frac{m^3}{12L^3 \rho^3 I}},$$

$$h = \sqrt{\frac{12L \rho I}{m}}.$$
(2)

Zajímavější situace vznikne v případě uvažování dutého průřezu obdélníkového tvaru, tzv. RHS (rectangular hollow section), popř. jeklu (viz také jazykovědná publikace [1]) s danou tloušťkou stěn  $t$ :

$$m = \rho L(bh - (b - 2t)(h - 2t)),$$

$$I = \frac{1}{12}(bh^3 - (b - 2t)(h - 2t)^3).$$
(3)

kde  $b$  a  $h$  jsou vnější rozměry profilu (zanedbejme případné zaoblení hran). Ačkoliv zřejmě neočekáváme potíže, je nalezení řešení těchto podmínek, jak ukážeme, nesnadné a dokonce nejednoznačné.

### 3 Numerické řešení

Nejprve zkusíme nalézt numerické řešení pro parametry: hmotnost  $m = 0.05$  kg, délka  $L = 5$  m, hustota materiálu  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>, moment setrvačnosti  $I = 5 \cdot 10^{-14}$  m<sup>4</sup> a tloušťka  $t = 0.2$  mm. Úspěšně lze pro dané hodnoty použít metodu přímé iterace v následujících dvou úpravách:

$$b_{j+1} = \frac{1}{h_j} \left( \frac{m}{\rho L} + (b_j - 2t)(h_j - 2t) \right),$$

$$h_{j+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{b_j} (12I + (b_j - 2t)(h_j - 2t)^3)}.$$
(4)

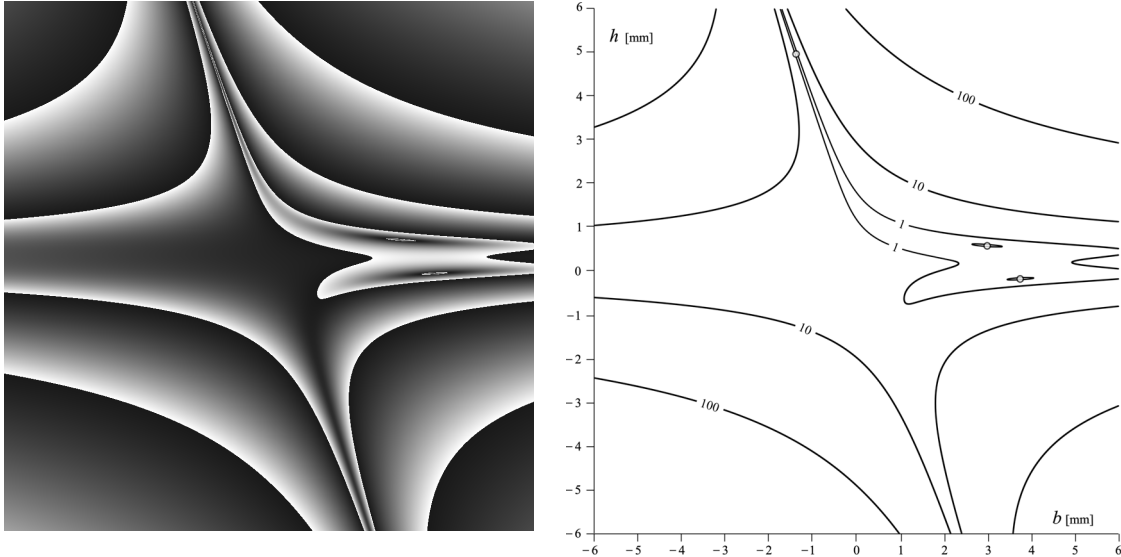
$$b_{j+1} = 2t - \frac{1}{h_j - 2t} \left( \frac{m}{\rho L} - b_j h_j \right),$$

$$h_{j+1} = 2t - \sqrt[3]{\frac{12I - b_j h_j^3}{b_j - 2t}}.$$
(5)

Soustava (4) dá při počátečních podmínkách  $b_0 = 0.01$  m a  $h_0 = 0.01$  m již po třiceti krocích dobrý odhad prvního řešení:  $b = 2.99$  mm a  $h = 0.591$  mm. Soustava (5) vede z počátečních podmínek  $b_0 = 0.01$  m a  $h_0 = -0.01$  m na druhé řešení:  $b = 3.75$  mm a  $h = -0.169$  mm. Vzhledem k tomu, že je druhá rovnice kubická, lze očekávat, že existuje ještě jedno řešení, které se ale nepovedlo nalézt žádnou z úprav pro přímou iteraci. Pro zmapování soustavy a nalezení třetího řešení bylo provedeno zobrazení odchylky přibližného řešení ve zvolené rovině ( $b, h$ ). Odchylka  $\delta$  byla formulována ve tvaru (délka vektoru relativních odchylek):

$$\delta(b, h) = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho L(bh - (b - 2t)(h - 2t))}{m}\right)^2 + \left(1 - \frac{bh^3 - (b - 2t)(h - 2t)^3}{12I}\right)^2}. \quad (6)$$

Na obr. 1 je vidět zobrazení průběhu odchylky  $\delta$  včetně polohy tří nalezených řešení zvýrazněných pomocí kroužků.



Obr. 1: Zobrazení průběhu odchylky  $\delta$  pomocí logaritmické monochromatické stupnice a vrstevnic. Řešení jsou vyznačena na vrstevnicovém zobrazení pomocí kroužků.

Z obrázku 1 je dobře patrná brázda třetího řešení se strmými okraji (jdoucí zespodu nahoru), která zřejmě způsobuje numerické potíže metody přímé iterace. Z grafického zobrazení lze přibližně stanovit polohu třetího řešení  $b \sim -1.38$  mm a  $h \sim 0.497$  mm.

#### 4 Analytické řešení

S použitím některého ze současně i volně dostupných analytických strojů, jakým je např. Wolfram Alpha [2], lze nalézt obecné řešení soustavy (3). Obdržené řešení je naneštěstí ve tvaru, který pouhým dosazením neumožňuje hodnoty vyčísřit v oboru reálných čísel (ačkoliv existují). Ukažme si jeden z kořenů pro šířku průřezu:

$$b = \frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{1}{2L\rho t} \left( \frac{\sqrt[3]{d}}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{d}} \left( \frac{3m^2}{2^{\frac{2}{3}}} + 8\sqrt[3]{2} L^2 \rho^2 t^4 \right) \right),$$

$$d = a + \sqrt{a^2 - 4(48L^2 \rho^2 t^4 + 9m^2)^3}, \quad (7)$$

$$a = 864L^2 m \rho^2 t^4 - 5184IL^3 \rho^3 t^2 + 54m^3,$$

kde  $a, d$  jsou pomocné konstanty.

Jelikož je (pro dané parametry) výraz pod druhou odmocninou záporný, musíme pro získání použitelného tvaru přejít do oboru komplexních čísel s očekáváním vymizení imaginární složky čísla po provedení obou odmocnin. Po přechodu do komplexního oboru lze pro diskriminant  $d$  psát:

$$d = a + \sqrt{i^2(4(48L^2\rho^2t^4 + 9m^2)^3 - a^2)} = a + i\sqrt{4(48L^2\rho^2t^4 + 9m^2)^3 - a^2},$$

$$a^2 - 4(48L^2\rho^2t^4 + 9m^2)^3 < 0. \quad (8)$$

Diskriminant  $d$  je nyní potřeba odmocnit, viz výraz (7). Pro třetí odmocninu z komplexního čísla platí:

$$\sqrt[3]{p+iq} = \sqrt[3]{|p+iq|} \cos\theta_{1,2,3} + i \sqrt[3]{|p+iq|} \sin\theta_{1,2,3},$$

$$\theta_1 = \frac{\theta}{3}, \quad \theta_{2,3} = \frac{\theta}{3} \pm \frac{2}{3}\pi, \quad (9)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{p}{|p+iq|}\right).$$

V našem případě pro absolutní hodnotu  $r$  a úhel  $\theta$  komplexního čísla  $d$  dle výrazu (8) lze psát (jistě ne náhodou vymizí konstanta  $a$  z výrazu pro absolutní hodnotu):

$$r = |d| = 2\sqrt{(48L^2\rho^2t^4 + 9m^2)^3},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{a}{r}\right). \quad (10)$$

Třetí odmocnina pak má tvar:

$$\sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{r} \cos\theta_{1,2,3} + i \sqrt[3]{r} \sin\theta_{1,2,3},$$

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{2} \sqrt{(48L^2\rho^2t^4 + 9m^2)^3}. \quad (11)$$

Výsledné komplexní číslo, které vznikne z třetí odmocniny si označme  $u + iv$ . Toto číslo nyní dosadíme do výrazu (7):

$$b = \frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{1}{2L\rho t} \left( \frac{u+iv}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{u+iv} \left( \frac{3m^2}{2^{\frac{2}{3}}} + 8\sqrt[3]{2} L^2 \rho^2 t^4 \right) \right), \quad (12)$$

který standardní úpravou pro odstranění komplexního čísla ze jmenovatele zlomku přejde do tvaru:

$$b = \frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{1}{2L\rho t} \left( \frac{u+iv}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{u-iv}{u^2+v^2} \left( \frac{3m^2}{2^{\frac{2}{3}}} + 8\sqrt[3]{2} L^2 \rho^2 t^4 \right) \right) =$$

$$\frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{1}{2L\rho t} \left( \frac{u+iv}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{u-iv}{r^{\frac{2}{3}}} \left( \frac{3m^2}{2^{\frac{2}{3}}} + 8\sqrt[3]{2} L^2 \rho^2 t^4 \right) \right). \quad (13)$$

Dosažením za konstantu  $r$  z výrazu (11) se nám výrazy značně zjednoduší včetně zmizení imaginární složky:

$$b = \frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{1}{2L\rho t} \left( \frac{u + iv}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{u - iv}{6\sqrt[3]{2}} \right) = \frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{u}{6\sqrt[3]{2}L\rho t}, \quad (14)$$

což po substituci reálné složky  $u$  dává tři hledaná řešení šířky a výšky průřezu:

$$b_{1,2,3} = \frac{m}{4L\rho t} + t - \frac{\sqrt[3]{r} \cos \theta_{1,2,3}}{6\sqrt[3]{2}L\rho t}, \quad (15)$$

$$h_{1,2,3} = \frac{m}{2L\rho t} + 2t - b_{1,2,3}.$$

V tabulce 1 jsou uvedena nalezená řešení dle označení uvedeného ve výrazech (9,15):

řešení	$b$ [mm]	$h$ [mm]
1	- 1.370416	4.955130
2	3.753809	- 0.169095
3	2.993678	0.591036

Tab. 1: Analyticky nalezené hodnoty rozměrů průřezu.

Smysluplné řešení je třetí v pořadí.

## 5 Platnost řešení

Diskriminant nacházející se pod druhou odmocninou určuje případy, kdy platí výše uvedený výraz (15). Kritické body jsou dány kvadratickou podmínkou:

$$(864L^2m\rho^2t^4 - 5184IL^3\rho^3t^2 + 54m^3)^2 - (48L^2\rho^2t^4 + 9m^2)^3 = 0, \quad (16)$$

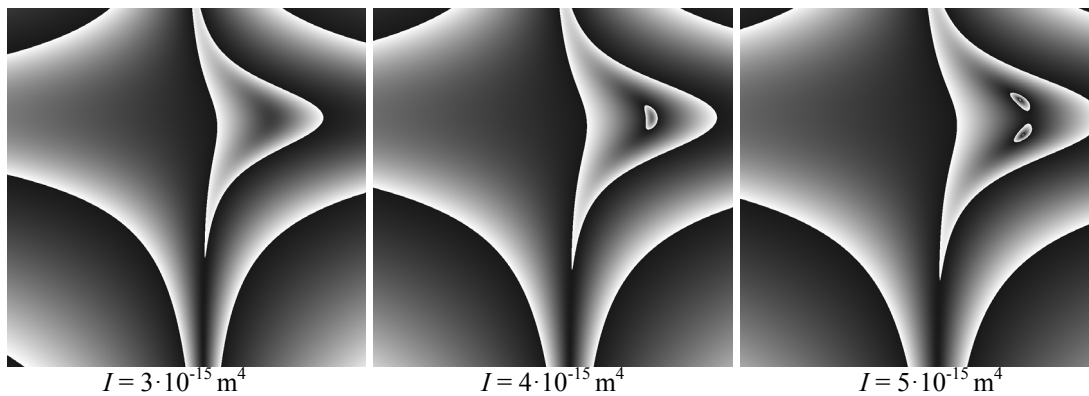
kteřá má dvě řešení pro moment setrvačnosti  $I$ :

$$I_{1,2} = \frac{1}{864L^4\rho^4t^2} \left( 9Lm^3\rho + 144L^3m\rho^3t^4 \pm \sqrt{3} \sqrt{27L^2m^6\rho^2 + 432L^4m^4\rho^4t^4 + 2304L^6m^2\rho^6t^8 + 4096L^8\rho^8t^{12}} \right). \quad (16)$$

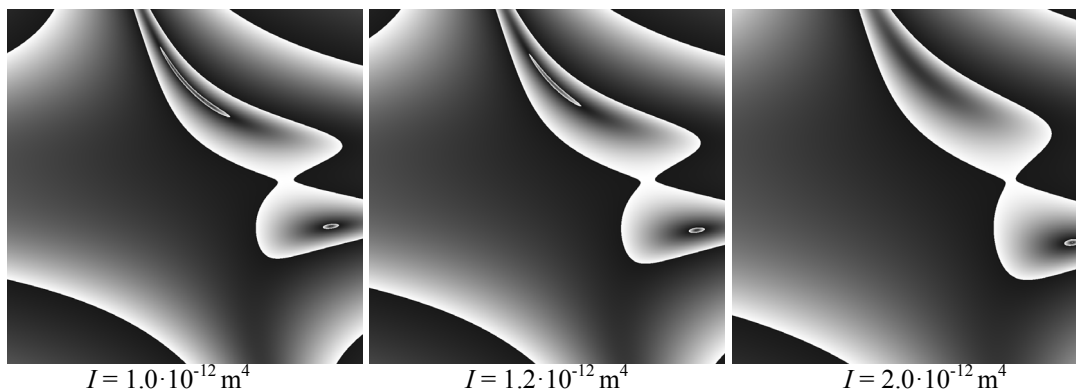
Pro zvolené parametry vychází kritické hodnoty momentu setrvačnosti přibližně  $I_1 = 4.24 \cdot 10^{-15} \text{ m}^4$  a  $I_2 = 1.09 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$ . Pro odvozený výraz (15) tedy platí  $I_1 < I < I_2$ . Pro představu si znázorníme plochy odchylky  $\delta$  pro moment setrvačnosti z okolí každého kritického bodu, viz obr. 2 a obr. 3. Z obrázků je patrné, že vzniká, respektive zaniká, dvojice (reálných) řešení. Smysluplné řešení s indexem 3 se tedy objevuje spolu s řešením s indexem 2 v bifurkačním bodě  $I_1$  (obr. 2). Zaniká pak v bifurkačním bodě  $I_2$  spojením s řešením o indexu 1 (obr. 3).

V intervalu  $I < I_1$  a  $I_2 < I$  lze pro stanovení reálného kořenu využít přímého dosazení do výrazu (7). Další dva kořeny jsou v těchto intervalech imaginární. Na obr. 4 je

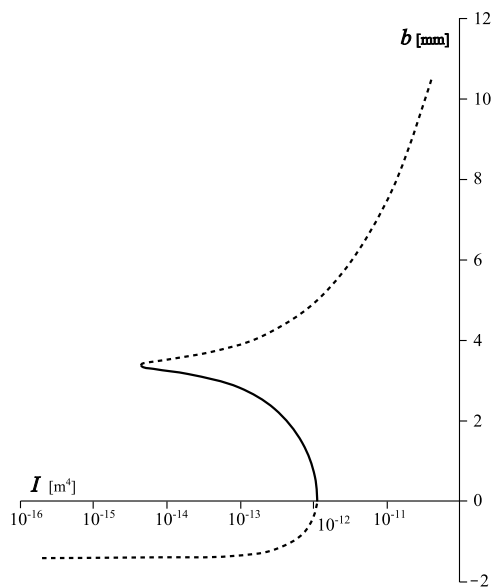
znázorněn bifurkační diagram všech nalezených řešení s reálnými hodnotami. Smysluplné řešení je znázorněno plnou čarou.



Obr. 2: Zobrazení průběhu odchylky  $\delta$  pro bifurkační bod  $I_1 = 4.24 \cdot 10^{-15} \text{ m}^4$



Obr. 3: Zobrazení průběhu odchylky  $\delta$  pro bifurkační bod  $I_2 = 1.09 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$



Obr. 4: Bifurkační diagram pro moment setrvačnosti  $I$ . Plnou čarou je znázorněno smysluplné řešení, čárkovanými čarami ostatní reálná řešení.

## 6 Závěr

Článek se věnoval identifikaci parametrů průřezu dynamického modelu prutu. Kromě nenáročného plného obdélníkového průřezu byla věnována pozornost dutému průřezu obdélníkového tvaru. Řešení bylo hledáno nejprve numerickou cestou, posléze analyticky.

Pro získání obecného analytického řešení byl užit analytický stroj. Samotné řešení bylo poté potřeba upravit kvůli jeho komplexní povaze. Tato úprava spočívala v provedení dvou odmocnin komplexních čísel a ve výsledku dala reálná řešení.

Ukázalo se, že smysluplné řešení úlohy existuje pouze v omezené oblasti. Kromě analytických výrazů byly ukázány také plochy definované odchylky a bifurkační diagram pro závislost šířky průřezu na momentu setrvačnosti.

## Poděkování

*Výsledek byl vytvořen za finanční podpory Grantové agentury v rámci projektu FRAPA, registrační číslo GA13-03662S.*

## Literatura

- [1] UHLÍŘOVÁ, L. Jekl, nebo jákl, elektronická verze časopisu *Naše řeč*, Ústav pro jazyk český, Akademie věd ČR, v. v. i., ročník 85, 2002, číslo 1.
- [2] WOLFRAM, S. *WolframAlpha*, computational knowledge engine, <http://www.wolframalpha.com>.
- [3] FRANTÍK, P., Java balík *cz.kitnarf.priklad3*, <http://www.kitnarf.cz/publications/2014/2014.02.mm.c11/2014.02.mm.c11.zip>.