PLOCHA LIGAMENTU VÁLCE S CHEVRONOVÝM VRUBEM

AREA OF LIGAMENT OF CYLINDER WITH CHEVRON NOTCH

Petr Frantík[1]

Abstrakt

V článku je odvozeno několik výrazů pro plochu ligamentu válce se symetrickým a nesymetrickým chevronovým vrubem. Jsou popsány dva přístupy a dva různé způsoby určení geometrie vrubu.

Klíčová slova

Chevronový vrub, Ligament.

Abstract

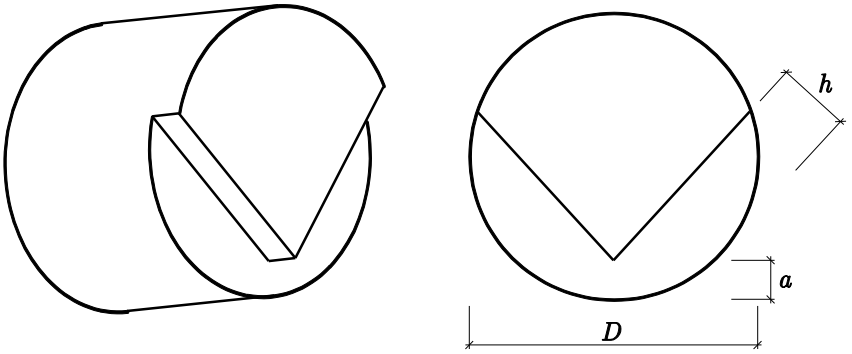
The contribution is focused on derivation of several relationships for area of ligament of a cylinder with symmetrical and unsymmetrical chevron notch. Two approaches are applied and two different specifications of the notch geometry are used.

Keywords

Chevron notch, Ligament.

1 Úvod

Příspěvek je věnován odvození výrazů pro plochu ligamentu válce opatřeného chevronovým zářezem, viz obr. 1, určeného průměrem válce *D,* největší hloubkou zářezu *h* a hloubkou zářezu v jeho vrcholu *a.* Takto upravený válec se užívá pro laboratorní stanovení lomových charakteristik materiálu nacházejícího se in situ, jehož vzorky se odebírají pomocí vývrtu, viz také [1].



Obr. 1: Válec opatřený chevronovým zářezem

[1] doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: kitnarf@centrum.cz

Prezentované odvození bylo motivováno snahou ověřit výraz publikovaný v práci [2] a případně jej zjednodušit. Dále se ukázalo, že nový přístup k odvození umožňuje stanovit plochu ligamentu i pro nesymetrický chevronový zářez.

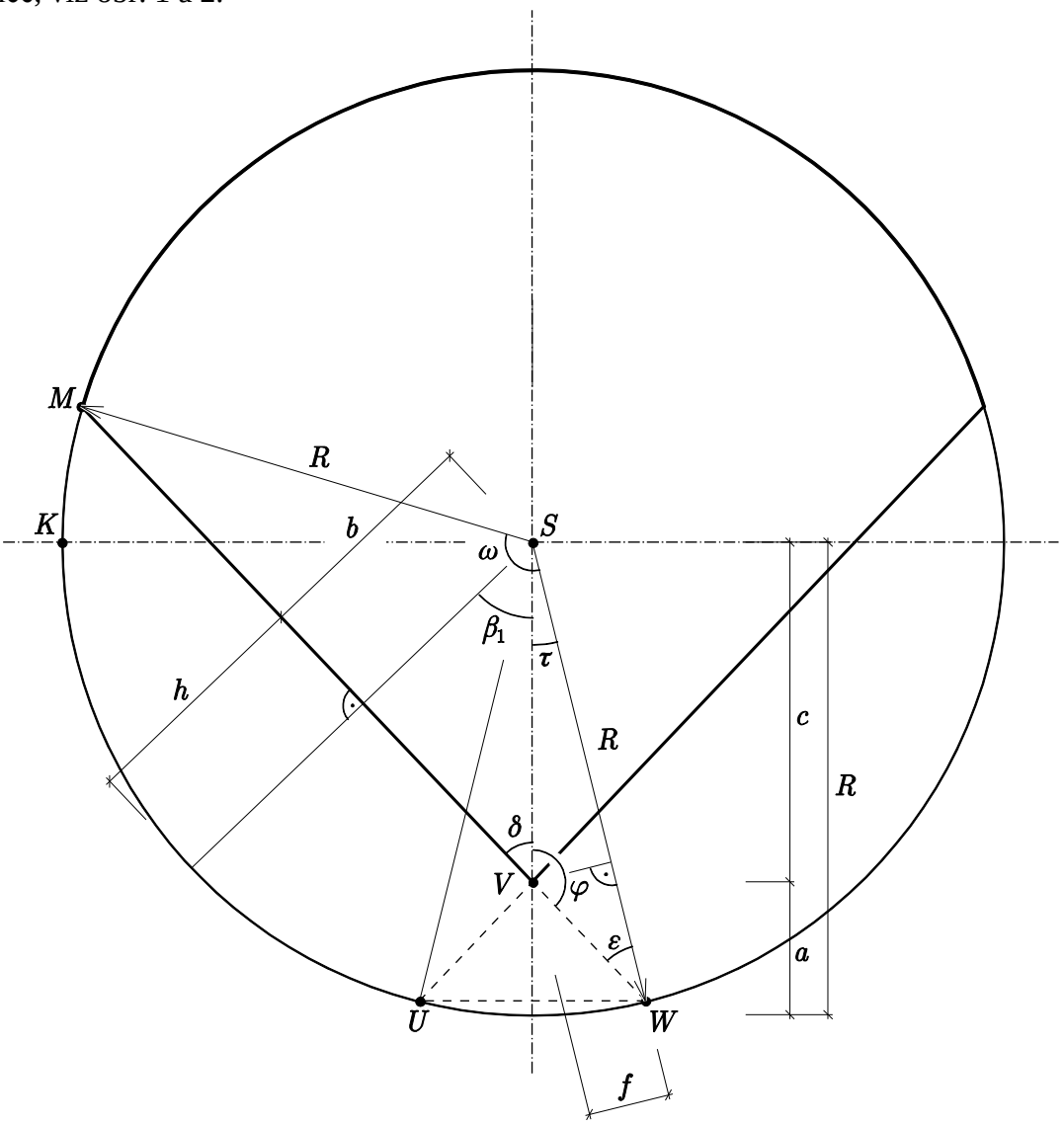
Dodejme, že zvolená definice geometrie zářezu má kritický bod $a = R$ při které se zvolené zadání stává neurčitým, jelikož nelze definovat úhel zářezu δ, viz dále.

2 Publikovaný přístup

Výraz publikovaný v [1] je založen na odečtení plochy úsečí A_{SMW} vzniklých řezem na obou stranách válce od plochy řezu válcem. Tyto úseče se však po provedení řezů vzájemně překrývají a proto je třeba přičíst plochu překryvu A_{UWV}:

$$A = \pi R^2 - 2A_{SMW} + A_{UWV},$$
$$A_{SMW} = \frac{R^2(\omega - \sin\omega)}{2}, \quad \omega = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{h}{R}\right), \tag{1}$$

kde úhel ω značí úhel úseče *SMW*, h je největší hloubka zářezu a $R = D/2$ je poloměr válce, viz obr. 1 a 2.



Obr. 2: Schéma symetrického chevronového zářezu

Plochu překryvu A_{UWV} stanovíme z plochy výseče *WSU*, od které odečteme dvojnásobek plochy trojúhelníku *UVS* resp. *VWS*:

$$A_{UWV} = A_{WSU} - 2A_{UVS},$$
$$A_{WSU} = R^2\tau, \quad A_{UVS} = \frac{Rf}{2}, \tag{2}$$

kde úhel τ je polovinou úhlu výseče *WSU* a *f* je výška trojúhelníku *VUS*. Díky doplňkům úhlů pro úhel τ platí:

$$\tau = \pi - \varphi - \varepsilon,$$
$$\varphi = \pi - \delta, \quad \delta = \frac{\pi}{2} - \beta_1, , \tag{3}$$

přičemž δ je úhel zářezu a význam dalších úhlů β_1, φ a ε je patrný z obrázku 2.

Úhel β_1 lze stanovit z pravoúhlého trojúhelníka:

$$\beta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R-a}\right), \tag{4}$$

kde *a* je vzdálenost vrcholu zářezu *V* od povrchu válce (hloubka ve vrcholu zářezu), *c* je vzdálenost vrcholu *V* od středu válce a *b* je vzdálenost přímky řezu od středu válce *S*.

Úhel ε se stanoví ze sinové věty:

$$\varepsilon = \sin^{-1}\left(\frac{R-a}{R}\sin\varphi\right). \tag{5}$$

Zbývá vyjádřit výšku *f* trojúhelníka *VWS*:

$$f = c\sin\tau, \quad c = R - a. \tag{6}$$

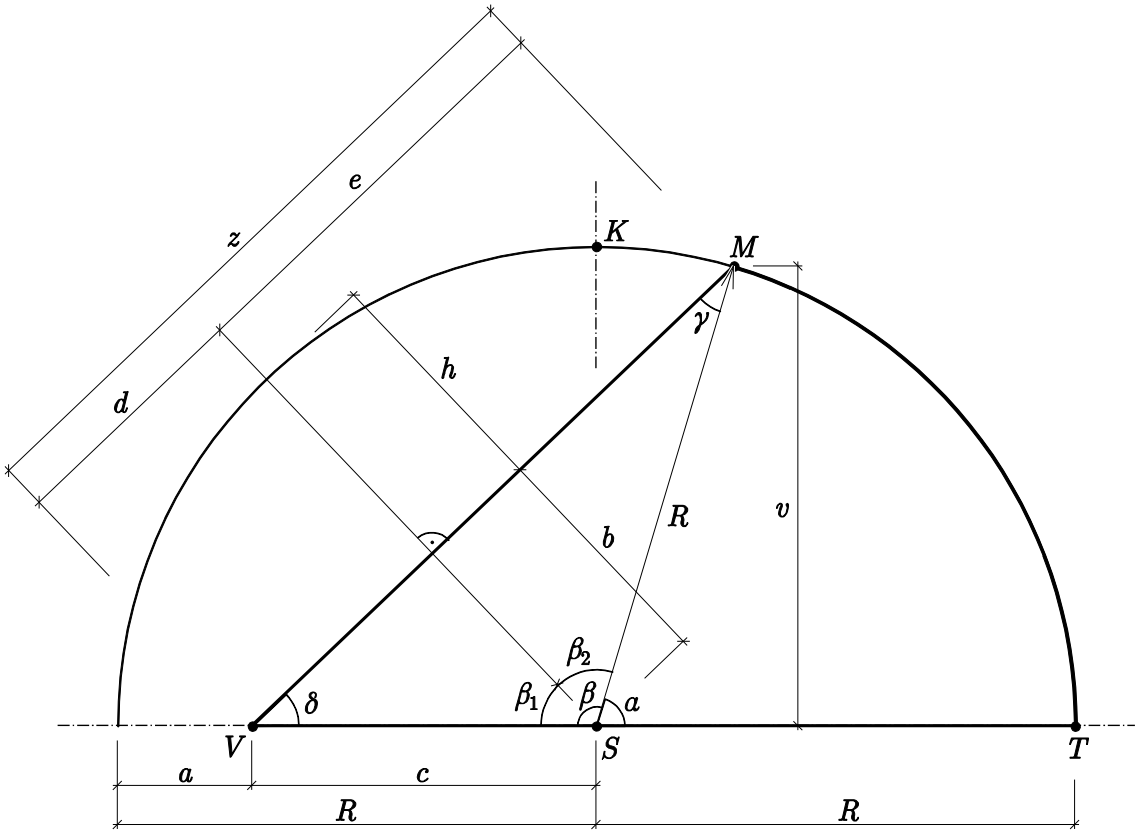
Výsledný výraz lze shrnout do tvaru:

$$A_1 = R\big(R(\pi - \omega - \sin\omega + \tau) - (R-a)\sin\tau\big),$$
$$\omega = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{h}{R}\right), \quad \tau = \delta - \sin^{-1}\left(\frac{R-a}{R}\sin\delta\right), \tag{7}$$
$$\delta = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R-a}\right).$$

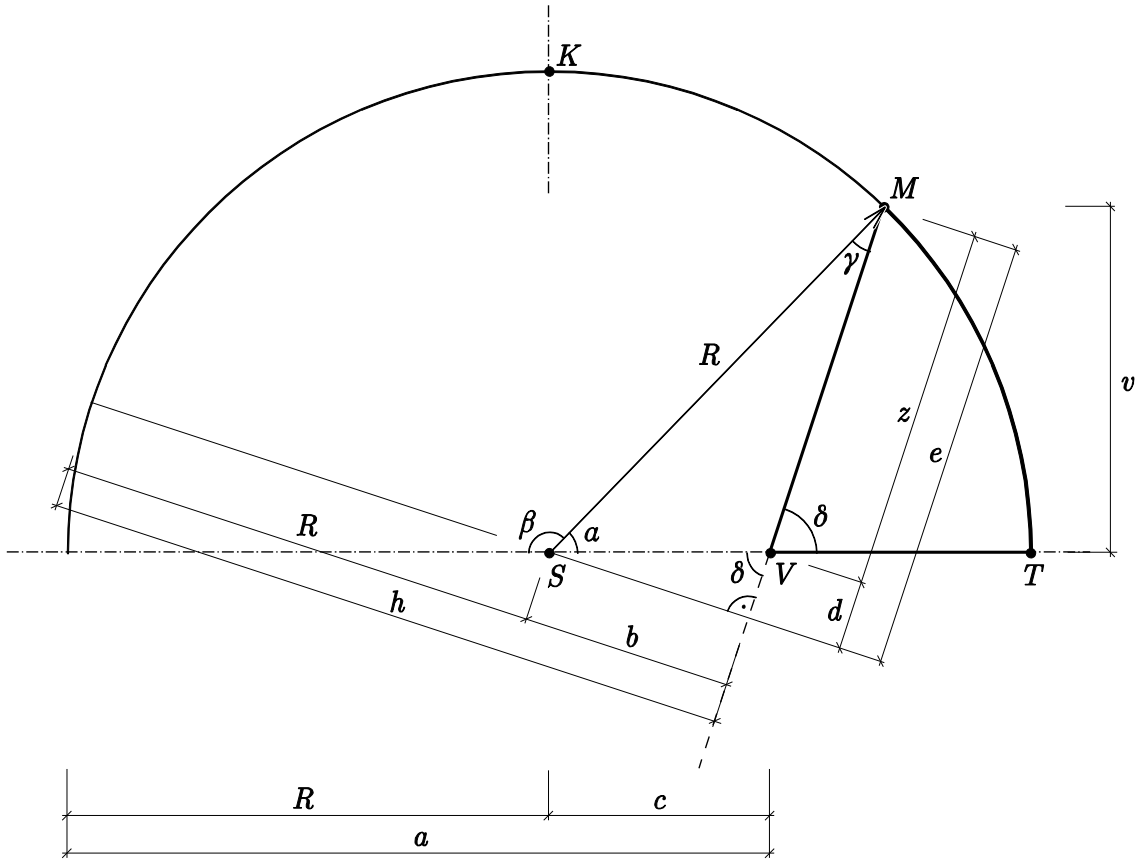
3 Alternativní přístup

Ověřovací přístup je založen na řešení plochy A_s jedné strany (u symetrického zářezu jedné poloviny) chevronového vrubu, která vznikne rozdělením válce přímkou procházející vrcholem zářezu *V* a středem válce *S*, viz obr. 3.

Z důvodu obecnosti řešení je však třeba říci, že dané schéma na obrázku 3 platí pro hloubku ve vrcholu zářezu *a* menší než je poloměr válce *R*, tj. $a < R$. Jak už bylo řečeno, dosažením kritické hodnoty $a = R$ se zvolené zadání stává neurčitým, jelikož nelze definovat úhel zářezu δ. Překročením tohoto kritického místa se dostáváme do oblasti kde platí $a > R$, viz obr. 4.



Obr. 3: Schéma jedné strany chevronového zářezu pro $a < R$



Obr. 4: Schéma jedné strany chevronového zářezu pro $a > R$

Plochu A_s stanovíme součtem respektive rozdílem plochy trojúhelníka *VSM* (obr. 3) a plochy výseče *STM* se středem *S* o poloměru *R* a úhlu α:

$$A_s = A_{VSM} + A_{STM},$$
$$A_{VSM} = \frac{zb}{2}, \quad A_{STM} = \frac{\alpha R^2}{2}, \tag{8}$$

kde z je základna trojúhelníka *VSM*, pro kterou platí:

$$z = \begin{cases} e + d, & a < R, \\ e - d, & a > R, \end{cases} \tag{9}$$
$$d = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad e = \sqrt{R^2 - b^2},$$

kde *d* a *e* jsou délky odvěsen přilehlých pravoúhlých trojúhelníků.

Úhel α byl stanoven třemi různými způsoby. Tyto způsoby zásadně ovlivňují podobu výsledného výrazu, viz dále.

3.1 Kosinová věta

První způsob stanovení úhlu α spočívá ve výpočtu doplňkového úhlu β pomocí kosinové věty z trojúhelníku *VSM* pro $a < R$:

$$\alpha = \pi - \beta,$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R^2 + c^2 - z^2}{2Rc} \right), \tag{10}$$

čímž obdržíme výraz, který poněkud překvapivě platí i pro $a > R$:

$$A_2 = 2A_{s2} = z(R-h) + R^2 \cos^{-1}\left(\frac{z^2 - R^2 - (R-a)^2}{2R(R-a)} \right),$$
$$z = \sqrt{(h-a)(2R-a-h)} + s\sqrt{h(2R-h)}, \quad s = \begin{cases} 1, & a < R, \\ -1, & a > R. \end{cases} \tag{11}$$

3.2 Rozdělení úhlu β

Ve druhém způsobu, za podmínky $a < R$ se úhel α rovněž spočítá z doplňkového úhlu β. Ovšem úhel β se rozdělí na úhly β_1 a β_2 přilehlých pravoúhlých trojúhelníků, na které se trojúhelník *VSM* rozpadá, viz obr. 3:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2,$$
$$\cos\beta_1 = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta_2 = \frac{b}{R}. \tag{12}$$

Úpravami obdržíme kompaktní výraz:

$$A_{3m} = 2A_{s3m} = (R-h)\left(\sqrt{h(2R-h)} + \sqrt{(h-a)(2R-a-h)} \right) + \\ + R^2 \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R-a} \right) - \cos^{-1}\left(\frac{R-h}{R} \right) \right), \quad a < R. \tag{13}$$

Pro interval $a > R$ využijeme pro stanovení úhlu α obecného trojúhelníka *VSM* pro který platí:

$$\alpha = \gamma - \delta,$$
$$\sin\lambda = \frac{b}{R}, \quad \sin\delta = \frac{b}{c}, \tag{14}$$

díky čemuž obdržíme po úpravách výraz:

$$A_{3h} = 2A_{s3h} = (R-h)\left(\sqrt{h(2R-h)} - \sqrt{(h-a)(2R-a-h)}\right) + \\ + R^2\left(\sin^{-1}\left(\frac{h-R}{a-R}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{h-R}{R}\right)\right), \quad a > R. \tag{15}$$

3.3 Stanovení výšky *v*

Třetí způsob vypočítá úhel α z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou *VM* o výšce *v*, pro kterou platí (viz obr. 3):

$$\frac{v}{z} = \sin\delta = \frac{b}{c} \Rightarrow v = \frac{bz}{c}. \tag{16}$$

Pro úhel α pak dle obr. 3 v intervalu $a < R$ platí:

$$\sin\alpha = \frac{v}{R} = \frac{bz}{Rc}. \tag{17}$$

Tento výraz ovšem platí pouze v případě, že se bod *M* nachází vpravo od bodu *K*. V okamžiku, kdy se tyto body ztotožní, dochází ke změně kvadrantu úhlu α. Proto zde existují vzájemně závislé kritické hodnoty hloubek zářezu a_{cr} a h_{cr}. Odvodit je lze z pravoúhlého trojúhelníka *VSK*, pro který platí:

$$tg\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{R}{c}, \quad \sin\delta = \frac{b}{c}, \quad \cos\delta = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{R}{c}. \tag{18}$$

Z této kvadratické rovnice odvodíme reálné kořeny:

$$a_{cr} = R\left(1 - \frac{R-h}{h(2R-h)}\sqrt{h(2R-h)}\right), \\ h_{cr} = R\left(\frac{2R^2 - a(2R-a) - (R-a)\sqrt{R^2 + (R-a)^2}}{R^2 + (R-a)^2}\right), \tag{19}$$

díky kterým lze změnu kvadrantu zohlednit ve výsledném výrazu (uvedeno pro h_{cr}):

$$A_4 = 2A_{s4} = z(R-h) + R^2\begin{cases} \pi - \sin^{-1}\left(\dfrac{z(R-h)}{R(R-a)}\right), & h \le h_{cr} \wedge a < R, \\ \sin^{-1}\left(\dfrac{z(R-h)}{R(R-a)}\right), & \text{jinak}. \end{cases} \tag{20}$$

4 Platnost řešení

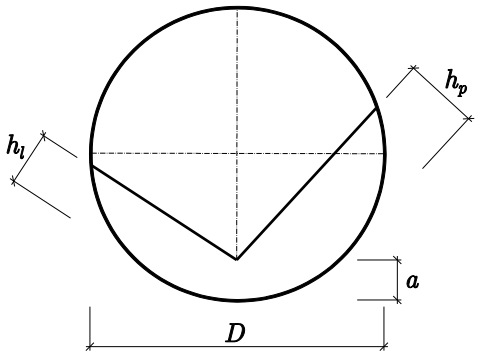
Výše popsaná řešení existují za následujících podmínek:

$$\begin{aligned} &\text{je-li} \quad a < R, \quad \text{pak} \quad a \le h \le R, \\ &\text{je-li} \quad a > R, \quad \text{pak} \quad R \le h \le a, \\ &0 \le a \le D \ \wedge \ a \ne R. \end{aligned} \tag{21}$$

Tedy maximální hloubka zářezu *h* nemůže být menší než hloubka zářezu v jeho vrcholu *a*, pokud je zářez mělký ($a < R$) a zároveň nemůže být větší než poloměr válce *R*. V případě hlubokého zářezu ($a > R$) je situace opačná. Tj. hloubka *h* nemůže být menší než poloměr válce *R* a nemůže být větší než hloubka zářezu ve vrcholu *a*.

5 Nesymetrický chevronový vrub

Alternativní řešení A_2 až A_4 je možno použít pro nesymetrický chevronový zářez daný průměrem D, největšími hloubkami zářezu h_p a h_l, tj. pravé resp. levé strany, viz obr. 5, a hloubkou zářezu ve vrcholu a.



Obr. 5: Nesymetrický chevronový zářez

Například druhé popsané řešení (11) dává přehledný výraz:

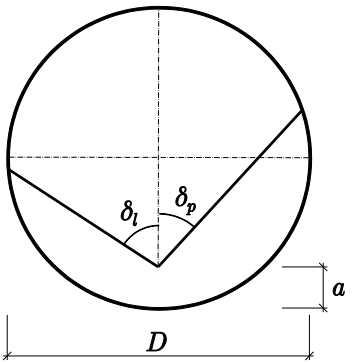
$$A_{\text{nesym2}} = A_{\text{s2},l} + A_{\text{s2},p},$$

$$A_{\text{s2},i} = \frac{1}{2}\left(z_i(R-h_i) + R^2 \cos^{-1}\left(\frac{z_i^{\,2} - R^2 - (R-a)^2}{2R(R-a)} \right) \right), \quad i = l, p, \tag{22}$$

$$z_i = \sqrt{(h_i - a)(2R - a - h_i)} + s\sqrt{h_i(2R - h_i)}, \quad s = \begin{cases} 1, & a < R, \\ -1, & a > R. \end{cases}$$

6 Zobecněný chevronový vrub daný úhly δ_l a δ_p

V úvodu příspěvku bylo ukázáno, že zvolený způsob zadání geometrie obsahuje bod $a = R$, kdy nelze určit geometrii vrubu, jelikož pro libovolný úhel δ musí platit $h = a$. Změňme tedy definici úlohy tak, aby tuto nedokonalost neobsahovala zadáním dvojice úhlů zářezu δ, viz obr. 6. Dodejme, že toto zadání tak zároveň umožní vznik obráceného chevronového vrubu.



Obr. 6: Nesymetrický chevronový zářez daný úhlem δ

Díky relacím (viz obr. 3):

$$b_i = c\sin\delta_i, \quad \sin\gamma_i = \frac{b_i}{R}, \quad d_i = c\cos\delta_i, \quad e_i = \sqrt{R^2 - b_i^{\,2}}, \tag{23}$$

sestavíme dosazením do (8) výraz:

$$
\begin{aligned}
&A_{\mathrm{gen}} = A_{\mathrm{sgen},l} + A_{\mathrm{sgen},p},\\
&A_{\mathrm{sgen},i} = \frac{1}{2}\Big((R-a)\sin\delta_i\Big((R-a)\cos\delta_i + \sqrt{R^2-(R-a)^2\sin^2\delta_i}\Big)+\\
&\qquad + R^2\left(\delta_i + \sin^{-1}\left(\frac{(R-a)}{R}\sin\delta_i\right)\right)\Big), \quad i = l, p,\\
&0 \le a \le D \ \wedge\ 0 \le \delta_i \le \pi.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

7 Závěr

V článku bylo postupně odvozeno celkem šest řešení plochy ligamentu válce s chevronovým vrubem. Ověřované první řešení vycházející z postupu publikovaného v práci [1] je doplněno výrazy získanými alternativním postupem založeným na řešení jedné strany ligamentu.

Poslední dvě řešení se týkají nesymetrického vrubu, přičemž šesté řešení rovněž umožňuje stanovení plochy obráceného chevronu.

Dodejme, že v důsledku způsobu zadání geometrie a výpočtu plochy kruhové výseče se není možné vyhnout inverzním goniometrický funkcím ve výsledných vztazích.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za finanční podpory projektu LO1408 AdMaS UP – Pokročilé materiály, konstrukce a technologie, podporovaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky v rámci Národního programu udržitelnosti I.

Literatura

[1] VAVRO, L. *Lomová houževnatost hornin a její zjišťování pro geomechanické hodnocení hornin a horninového masivu,* dizertační práce, VŠB-TU Ostrava, 2014.

[2] KUBEŠ, P. *Pokročilé vyhodnocení lomových testů vybraných horninových těles,* bakalářská práce, VUT FAST v Brně, 2016.